Injetividade e sobrejetividade linear

Álgebra Linear – Videoaula 12

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Funções injetivas e sobrejetivas

Uma função $f\colon X \to Y$ é

- **injetiva** se para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, tem-se que

  $$\text{se } f(x_1) = f(x_2) \quad \text{então} \quad x_1 = x_2.$$

  Equivalentemente, f é injetiva se para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, tem-se que

  $$\text{se } x_1 \neq x_2 \quad \text{então} \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

- **sobrejetiva** se para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Equivalentemente, f é sobrejetiva se $f(X) = Y$.

Transformações lineares sobrejetivas

Teorema

Seja $S\colon V \to W$ *linear. São equivalentes:*

1. S *é sobrejetiva*
2. $\operatorname{im}(S) = W$

Se W *tem dimensão finita, também são equivalentes a*

3. $\operatorname{rank}(S) = \dim(W)$

Transformações lineares sobrejetivas

$$\begin{aligned} S \text{ sobrejetiva} \quad &\iff \quad S(V) = W \quad &&\text{(definição de sobrejetividade)} \\ &\iff \quad \operatorname{im}(S) = W &&\text{(definição de imagem)} \end{aligned}$$

Lembre-se: Se W tem dimensão finita, o único subespaço de W de mesma dimensão é ele próprio

$$\begin{aligned} S \text{ sobrejetiva} \quad &\iff \quad \operatorname{im}(S) = W \quad &&\text{(definição de imagem)} \\ &\iff \quad \dim(\operatorname{im}(S)) = \dim(W) \\ &\iff \quad \operatorname{rank}(S) = \dim(W). \end{aligned}$$

Sobrejetividade e dimensão

Teorema

Se $\dim(V) < \dim(W)$, *então não existe nenhuma transformação linear sobrejetiva* $S\colon V \to W$.

(Contra-positiva) Pelo TNI, se $S\colon V \to W$ é sobrejetiva, então

$$\begin{aligned}\dim(V) &= \dim(\operatorname{im}(S)) + \dim(\ker(S))\\ &= \dim(W) + \dim(\ker(S))\\ &\geq \dim(W)\end{aligned}$$

Transformações lineares sobrejetivas

Teorema

Se $T: V \to W$ é linear e sobrejetiva e $G \subseteq V$ é gerador, então $T(G) \subseteq W$ é gerador.

Se T é sobrejetiva,

$$\operatorname{span}(T(G)) = T(\operatorname{span}(G)) = T(V) = W$$

Transformações lineares injetivas

Teorema

Seja $T: V \to W$ linear. São equivalentes:

1. *T é injetiva*
2. $\ker(T) = \{0_V\}$
3. $\text{nulidade}(T) = 0$

Se V tem dimensão finita, também são equivalentes a

4. $\dim(\text{im}(T)) = \dim(V)$.

$\underline{T \text{ injetiva} \implies \ker(T) = \{0_V\}}$:

Suponha que T é injetiva.

Se $x \in \ker(T)$, então

$$T(x) = 0_W = T(0_V)$$

Por injetividade, $x = 0_V$.
Portanto $\ker(T) \subseteq \{0_V\}$. A inclusão oposta é trivial.

Transformações lineares injetivas

<u>$\ker(T) = \{0_V\} \implies T$ injetiva</u>:

Suponha que $\ker(T) = \{0_V\}$.
Sejam $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$. Então

$$T(u - v) = T(u) - T(v) = 0_W.$$

Assim, $u - v \in \ker(T) = \{0_V\}$, logo $u - v = 0_V$, ou seja, $u = v$.

Portanto, $T(u) = T(v) \implies u = v$, o que significa que T é injetiva.

Isto provou a equivalência dos dois primeiros itens do teorema.

$$\begin{aligned} \ker(T) = \{0_V\} &\iff \dim(\ker(T)) = 0 \\ &\iff \text{nulidade}(T) = 0 \end{aligned}$$

Se V tem dimensão finita, pelo TNI,

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}(T))$$

e assim,

$$\begin{aligned} \text{nulidade}(T) = 0 &\iff \dim(\ker(T)) = 0 \\ &\iff \dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(V) \end{aligned}$$

Injetividade e dimensão

Teorema

Se $\dim(V) > \dim(W)$, *então não existe nenhuma transformação linear injetiva* $T: V \to W$

(Contra-positiva) Se T é linear e injetiva,

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(T)) \leq \dim(W)$$

Teorema

Se $T: V \to W$ é linear e injetiva e $I \subseteq V$ é LI, então $T(I) \subseteq W$ é LI.

Uma combinação linear dos elementos de $T(I)$ é da forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$, onde $v_1, \ldots, v_n \in I$.
Se

$$0_W = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right),$$

então $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in \ker(T) = \{0_V\}$, logo

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0_V,$$

e portanto $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ pois I é LI.

Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$T(x, y, z) = (3y - z, 5x - y + 10z, 3x + 2y + 6z, 2x + 4z)$$

ou seja,

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- É sobrejetiva? Não, pois a dimensão do domínio é menor do que a do contra-domínio: $\dim(\mathbb{R}^3) < \dim(\mathbb{R}^4)$
- É injetiva? Calculamos o kernel.

$$T(x,y,z) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases}   3y - z = 0 \\ 5x - y + 10z = 0 \\ 3x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z = 0.$$

Portanto, $\ker(T) = \{(0,0,0)\}$.

Sim, é injetiva.

Note que, pelo TNI,

$$\dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(T)) = 3 - 0 = 3.$$

Portanto, $\mathrm{im}(T) \neq \mathbb{R}^4$, outra prova de que ela não é sobrejetiva.

Considere a transformação linear $S\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$S(x, y, z, w) = (2x - 2y, -4y - 3z + 5w, -3x + 4y)$$

ou seja,

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

- É sobrejetiva? Tente verificar que $\dim(\mathrm{im}(S)) = 3$. Lembre-se: $\mathrm{im}(S) =$espaço coluna da matriz associada.

Escalone a matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ pivôs} &\implies 3 \text{ vetores na base do espaço coluna/imagem de } S \\ &\implies \dim(\operatorname{im}(S)) = 3 \\ &\implies \text{Sobrejetiva.} \end{aligned}$$

- É injetiva? Não, pois a dimensão do domínio é maior do que a do contra-domínio: $\dim(\mathbb{R}^4) > \dim(\mathbb{R}^3)$

Alternativamente, pelo TNI,

$$\dim(\ker(S)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{im}(S)) = 4 - 3 = 1,$$

logo $\ker(S) \neq \{0_4\}$, e S não é injetiva.

Considere a transformação linear $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$Q(x, y, z) = (4x + 8y - 3z, 5x + 10y - 5z, -4z, 3x + 6y - 3z)$$

ou seja,

$$Q\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- É sobrejetiva? Não, pois a dimensão do domínio é menor do que a do contra-domínio: $\dim(\mathbb{R}^3) < \dim(\mathbb{R}^4)$
- É injetiva? Calculamos o kernel/escalonamos a matriz.

Exemplos

$Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma coluna sem pivô

$\implies$ O sistema associado tem uma variável livre na solução geral

$\implies$ O espaço solução/$\ker(Q)$ tem dimensão 1

$\implies$ Não-injetiva.