Operações com transformações lineares

Álgebra Linear – Videoaula 13

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Operações lineares sobre transformações

Sejam V, W dois espaços vetoriais. Vamos denotar

$$\mathrm{L}(V,W) = \{T\colon V \to W \text{ linear}\},$$

o conjunto das transformações lineares de V em W.

Consideramos as "operações pontuais": dadas $T, S\colon V \to W$ lineares,

$$T + S\colon V \to W, \qquad (T+S)(x) = T(x) + S(x)$$

e, dado $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda T)(x) = \lambda \cdot T(x).$$

Exercício: $T + S$ e λT são lineares.

Teorema

$\mathrm{L}(V, W)$ *é um espaço vetorial com as operações pontuais.*

- Comutatividade: $$\begin{aligned}(T+S)(v) &= T(v)+S(v)\\ &= S(v)+T(v)\\ &= (S+T)(v),\end{aligned}$$
  logo $T+S=S+T$ (para quaisquer S, T).
- $\cdots$
- A **transformação nula** $\mathbf{0}\colon V \to W$, $\mathbf{0}(v)=0_W$, serve como "vetor" nulo:
  $$(T+\mathbf{0})(v)=T(v)+\mathbf{0}(v)=T(v)+0_W=T(v),$$
  portanto $T+\mathbf{0}=T$.

Operações lineares e kernel

Se $T \in \mathrm{L}(V, W)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $$\begin{aligned}\ker(\alpha T) &= \{x : (\alpha T)(x) = 0_W\} \\ &= \{x : \alpha T(x) = 0_W\} \\ &= \begin{cases} \{x : 0_W = 0_W\}, & \text{se } \alpha = 0 \\ \{x : T(x) = 0_W\}, & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} V, & \text{se } \alpha = 0 \\ \ker(T), & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\mathrm{im}(\alpha T) &= \{\alpha T(x) : x \in V\} \\ &= \begin{cases} \{0_W\}, & \text{se } \alpha = 0 \\ \mathrm{im}(T), & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Operações lineares e imagem

Se $T, S \in \mathrm{L}(V, W)$,

- $$\begin{aligned} \ker(T+S) &= \{x : (T+S)(x) = 0_W\} \\ &= \{x : T(x) + S(x) = 0_W\} \\ &\supseteq \{x : T(x) = 0\} \cap \{x : S(x) = 0\} \\ &= \ker(T) \cap \ker(S) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathrm{im}(T+S) &= \{T(x) + S(x) : x \in V\} \\ &\subseteq \mathrm{im}(T) + \mathrm{im}(S) \end{aligned}$$

Espaços de transformações lineares como subespaços de espaços de funções

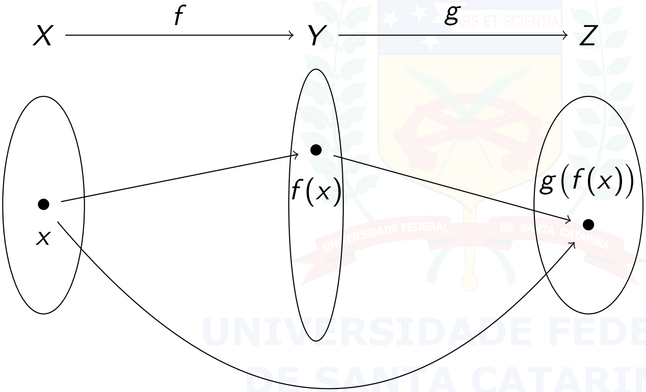
- Já sabemos que se X é um conjunto, então $\mathbb{R}^X$, o conjunto das funções $f\colon X \to \mathbb{R}$, é um espaço vetorial.
- Mas podemos trocar $\mathbb{R}$ por um espaço vetorial W: Se W é um espaço vetorial e X é um conjunto, então W^X, o conjunto das funções $f\colon X \to W$, é um espaço vetorial com "operações pontuais":

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

- Em particular, se V é um espaço vetorial, então W^V o conjunto das funções $V \to W$, é um espaço vetorial.
- O subconjunto $\mathrm{L}(V,W)$ é subespaço de W^V.

Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$, então

$$(g \circ f)\colon X \to Z, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Produto de transformações lineares

Notação

Se $T\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$ são lineares, então denota-se composição como produto:

$$ST\colon U \to W, \qquad ST(u) = S(T(u))$$

Similarmente a produtos usuais, denotamos, para $T\colon V \to V$,

- $T^1 = T$
- $T^2 = TT$
- $T^3 = TTT$
- $T^n = TT\cdots T$;
- $T^0 = \mathrm{id}_V$.

Produto de transformações lineares

Teorema

Se $T : U \to V$ e $S : V \to W$ são lineares, então $ST : U \to W$ é linear

Se $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ST(u_1 + \lambda u_2) &= S(T(u_1 + \lambda u_2)) \\ &= S(T(u_1) + \lambda T(u_2)) \\ &= S(T(u_1)) + \lambda S(T(u_2)) \\ &= ST(u_1) + \lambda ST(u_2) \end{aligned}$$

A função identidade

A **função identidade** de um espaço vetorial V,

$$\mathrm{id}_V\colon V \to V, \qquad \mathrm{id}_V(v) = v$$

satisfaz

$$\mathrm{id}_V\, T = T \qquad \text{e} \qquad S\,\mathrm{id}_V = S$$

para quaisquer $T\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$ lineares.

- $(\mathrm{id}_V\, T)(u) = \mathrm{id}_V(T(u)) = T(u)$
- $(S\,\mathrm{id}_V)(v) = S(\mathrm{id}_V(v)) = S(v)$

Notações alternativas

Às vezes se denota

$$\mathrm{id}_V = I_V = 1_V$$

Funções nulas

A **transformação nula** de um espaço vetorial V a um espaço vetorial W é

$$\mathbf{0}_{V\to W}\colon V \to W, \qquad \mathbf{0}_{V\to W}(v) = 0_W.$$

Essas funções satisfazem

$$\mathbf{0}_{V\to W}T = \mathbf{0}_{U\to W} \qquad \text{e} \qquad S\mathbf{0}_{U\to V} = \mathbf{0}_{U\to W}$$

para quaisquer $T\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$ lineares.

- $(\mathbf{0}_{V\to W}T)(u) = \mathbf{0}_{V\to W}(T(u)) = 0_W = \mathbf{0}_{U\to W}(u)$
- $(S\mathbf{0}_{U\to V})(u) = S(\mathbf{0}_{U\to V}(u)) = S(0_V) = 0_W = \mathbf{0}_{U\to W}(u)$

Mais propriedades de operações com transformações lineares

Teorema

Além dos axiomas de espaços vetoriais, valem as seguintes propriedades: se $T, T_1, T_2, \in \mathrm{L}(V, W)$*,* $Q \in \mathrm{L}(U, V)$ *e* $S \in \mathrm{L}(W, Z)$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, então*

- $S(TQ) = (ST)Q$
- $(T_1 + T_2)Q = (T_1 Q) + (T_2 Q)$
- $S(T_1 + T_2) = (ST_1) + (ST_2)$
- $\alpha(ST) = (\alpha S)T = S(\alpha T)$.

$$
\begin{aligned}
[(T_1 + T_2)Q](u) &= (T_1 + T_2)(Q(u)) \\
&= T_1(Q(u)) + T_2(Q(u)) \\
&= (T_1 Q)(u) + (T_2 Q)(u) \\
&= (T_1 Q + T_2 Q)(u)
\end{aligned}
$$

portanto $(T_1 + T_2)Q = (T_1 Q) + (T_2 Q)$

Mais propriedades de operações com transformações lineares

$$
\begin{aligned}
[S(T_1 + T_2)](u) &= S((T_1 + T_2)(u)) \\
&= S(T_1(u)) + S(T_2(u)) \\
&= (ST_1)(u) + (ST_2)(u) \\
&= (ST_1 + ST_2)(u)
\end{aligned}
$$

portanto $S(T_1 + T_2) = (ST_1) + (ST_2)$.

A terceira propriedade é exercício.

Mais propriedades de operações com transformações lineares

Se $T: V \to V$ linear, vale que

$$T^n T^m = T^{n+m}, \qquad (T^n)^m = T^{(nm)}.$$

Mas com $S: V \to V$,

$$(ST)^n \qquad \text{e} \qquad S^n T^n$$

podem ser diferentes!

Também,

$$(S+T)^2 \qquad \text{e} \qquad S^2 + 2ST + T^2$$

podem ser diferentes!

Nem todas as operações são tão boas

Tome as transformações de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$:

$$S(x, y) = (0, x), \qquad T(x, y) = (y, x)$$

Então

- $(ST)^2(x, y) = (0, y)$.
- $(S^2T^2)(x, y) = (0, 0)$.
- $(S + T)^2(x, y) = (2x, 2y)$.
- $(S^2 + 2ST + T^2)(x, y) = (x, 3y)$.

Inversas laterais

Definição

Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ funções

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Dizemos que g é

- **inversa à esquerda de** f se $g \circ f = \mathrm{id}_X$;
- **inversa à direita de** f se $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Fato

Uma função f é injetiva se, e somente se, admite inversa à esquerda; f é sobrejetiva se, e somente se, admite inversa à direita.

Teorema

*Uma transformação linear $T\colon V \to W$ é injetiva se, e somente se, existe $S\colon W \to V$ **linear** tal que $ST = \mathrm{id}_V$ (inversa à esquerda de T).*

Se S é inversa à esquerda de T e $T(x) = T(y)$, então

$$x = ST(x) = ST(y) = y.$$

Portanto T é injetiva.

Injetividade e inversa à esquerda

Suponha T injetiva.

Seja $\mathcal{B}$ uma base de V.

Como T é injetiva e $\mathcal{B}$ é LI, então $T(\mathcal{B}) \subseteq W$ é LI.

Considere uma base $\mathcal{C}$ de W com $T(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}$.

Defina $S\colon W \to V$ na base $\mathcal{C}$ como

$$\begin{cases} S(T(b)) = b & \text{para} \quad b \in \mathcal{B} \\ S(c) = 0_V & \text{para} \quad c \notin T(\mathcal{B}). \end{cases}$$

Então para todo $b \in \mathcal{B}$, $ST(b) = b = \mathrm{id}_V(b)$, i.e., ST coincide com id_V numa base, e portanto $ST = \mathrm{id}_V$.

Sobrejetividade e inversa à direita

Teorema

*Uma transformação linear $T\colon V \to W$ é sobrejetiva se, e somente se, existe $Q\colon W \to V$ **linear** tal que $TQ = \mathrm{id}_W$ (inversa à direita de T).*

Se Q é inversa à direita de T, então para todo $w \in W$ temos que

$$w = \mathrm{id}_W(w) = TQ(w) = T(Q(w)) \in \mathrm{im}(T),$$

e portanto T é sobrejetiva.

Sobrejetividade e inversa à direita

Suponha que T é sobrejetiva.

Seja $\mathcal{C}$ uma base de W.

Para cada $c \in \mathcal{C}$, escolha um vetor $x_c \in V$ tal que $T(x_c) = c$.

Defina $Q\colon W \to V$ na base $\mathcal{C}$ por $Q(c) = x_c$.

Então para todo $c \in \mathcal{C}$

$$TQ(c) = T(x_c) = c = \mathrm{id}_W(c)$$

logo $TQ = \mathrm{id}_W$ numa base, e portanto em todo o W.

Composição, imagem direta e imagem inversa

Teorema

Sejam $T\colon U \to V$ e $S\colon V \to W$ *lineares.*

1. *Para* $A \subseteq V$, *vale que* $(ST)(A) = S(T(A))$;
2. *Para* $B \subseteq W$, *vale que* $(ST)^{-1}(B) = T^{-1}(S^{-1}(B))$

Se $A \subseteq V$,

$$\begin{aligned}(ST)(A) &= \{(ST)(a) : a \in A\} \\ &= \{S(T(a)) : a \in A\} \\ &= \{S(x) : x \in T(A)\} \qquad = S(T(A)).\end{aligned}$$

Se $B \subseteq W$, denotemos $C = S^{-1}(B)$

$$\begin{aligned}(ST)^{-1}(B) &= \{v \in V : (ST)(v) \in B\} \\ &= \{v \in V : S(T(v)) \in B\} \\ &= \left\{v \in V : T(v) \in S^{-1}(B)\right\} \\ &= \{v \in V : T(v) \in C\} \\ &= T^{-1}(C) = T^{-1}(S^{-1}(B))\end{aligned}$$

Em $\mathbb{R}^2$, considere

$$A(x,y) = (y,x) \qquad B(x,y) = (x,0)$$

Então

$$\begin{aligned}
(AB)^{-1}(\{(0,0)\}) &= \{(x,y) : AB(x,y) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y) : A(x,0) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y) : (0,x) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y) : x = 0\} \\
&= \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Composição, imagem direta e imagem inversa

$$A(x,y) = (y,x) \qquad B(x,y) = (x,0)$$

$$(AB)^{-1}(\{(0,0)\}) = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned}
A^{-1}(B^{-1}(\{(0,0)\})) &= \left\{(x,y) : A(x,y) \in B^{-1}(\{(0,0)\})\right\} \\
&= \left\{(x,y) : (y,x) \in B^{-1}(\{(0,0)\})\right\} \\
&= \{(x,y) : B(y,x) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y) : (y,0) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y) : y = 0\} \\
&= \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}\,.
\end{aligned}$$