Representações matriciais de transformações lineares

Álgebra Linear – Videoaula 15

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Isomorfismos com $\mathbb{R}^n$

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n e $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ uma base de V.

Temos um isomorfismo $\tau \colon V \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ dado na base $\mathcal{B}$ por

$$\tau(b_i) = e_i$$

onde $e_1, \ldots, e_n$ são a base canônica de $\mathbb{R}^n$.
Em particular,

$$\tau(b_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isomorfismos com $\mathbb{R}^n$

Mas e se reordenarmos os elementos de $\mathcal{B}$?

$$\mathcal{B}' = \{b_2, b_1, b_3, b_4 \ldots, b_n\} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

onde $w_1 = b_2$, $w_2 = b_1$, $w_i = b_i$ para $i \geq 3$.

Obtemos um novo isomorfismo

$$\tau' \colon V \to \mathbb{R}^n, \qquad \tau'(w_i) = e_i.$$

Em particular,

$$\tau'(b_1) = \tau'(w_2) = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O isomorfismo entre V e $\mathbb{R}^n$ depende da ordem dos elementos da base $\mathcal{B}$!

Bases ordenadas

Definição

Uma base ordenada de um espaço vetorial V é uma n-tupla ordenada $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de vetores distintos de V tais que $\{b_1, \ldots, b_n\}$ é base de V.

Várias notações são usadas:

- $(b_1, \ldots, b_n)$, como fizemos;
- $[b_1, \ldots, b_n]$;
- simplesmente $\{b_1, \ldots, b_n\}$ (quando não gerar confusão).

Bases ordenadas

A cada base ordenada $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ corresponde um isomorfismo $V \to \mathbb{R}^{n\times 1}$, dado por

$$\tau(b_i) = e_i$$

ou seja, se $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, então

$$\tau(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau(b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Chamamos de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ as **coordenadas** de v com relação a $\mathcal{B}$.

Vetores de coordenadas

Definição

Sejam $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ base ordenada de V e $v \in V$. O **isomorfismo $\mathcal{B}$-coordenado** é o isomorfismo $\tau_{\mathcal{B}} \colon V \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $\tau_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i$.
Se $v \in V$ é representado na base $\mathcal{B}$ por

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n,$$

então o **vetor-coordenada de** v com relação a $\mathcal{B}$ é a matriz coluna

$$[v]^{\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{B}}(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Coordenada para transformações lineares

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita com bases ordenadas

$$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n) \text{ de } V \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m) \text{ de } W.$$

Então temos os isomorfismos coordenados

$$\tau_{\mathcal{B}} \colon V \to \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \tau_{\mathcal{C}} \colon W \to \mathbb{R}^m.$$

Se $T \colon V \to W$ é uma transformação linear, induzimos uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, leftrightarrow, "\tau_{\mathcal{B}}", "\tau_{\mathcal{B}}^{-1}"'] \arrow[d, "T"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\tau_{\mathcal{C}} T \tau_{\mathcal{B}}^{-1}"] \\
W \arrow[r, "\tau_{\mathcal{C}}"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\ \tau_{\mathcal{B}}^{-1}\ } & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{\mathcal{C}} T \tau_{\mathcal{B}}^{-1}} \\ W & \xrightarrow{\ \tau_{\mathcal{C}}\ } & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Mas já temos uma ideia de que toda transformação linear entre espaços euclidianos é dada por uma matriz.

Qual é uma forma explícita de construir a matriz associada?

Definição

Sejam $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ e $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ bases ordenadas de V e W, respectivamente, e $T \in \mathrm{L}(V, W)$.

A **matriz de T com relação a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$** é a matriz

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [t_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}$$

onde, para cada j, as entradas $t_{1j}, \ldots, t_{2j}$ são as coordenadas de $T(b_j)$ com relação à base $\mathcal{C}$.

Matrizes de transformações lineares

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [t_{ij}]_{i,j} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{c}\text{para cada } j,\ t_{1j}, \dots, t_{mj} \\ \text{são as coordenadas de} \\ T(b_j) \text{ com relação a } \mathcal{C}\end{array}\right)$$

Isso é,

$$\left\{\begin{array}{rcccccccc} T(b_1) & = & t_{11}c_1 & + & t_{21}c_2 & + & \cdots & + & t_{m1}c_m \\ T(b_2) & = & t_{12}c_1 & + & t_{22}c_2 & + & \cdots & + & t_{m2}c_m \\ & \vdots & & & & & & & \\ T(b_j) & = & t_{1j}c_1 & + & t_{2j}c_2 & + & \cdots & + & t_{mj}c_m \\ & \vdots & & & & & & & \\ T(b_n) & = & t_{1n}c_1 & + & t_{2n}c_2 & + & \cdots & + & t_{mn}c_m. \end{array}\right.$$

$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é a transposta da “matriz solução” do “sistema” $(mn) \times (mn)$ acima.

Equivalentemente:

- A (i,j)-ésima entrada de $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ contém a i-ésima coordenada em $\mathcal{C}$ da "j-ésima imagem" $T(v_j)$.
- Se escrevermos $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ em função de suas colunas temos que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(b_1)]^{\mathcal{C}} & \cdots & [T(b_n)]^{\mathcal{C}} \\ | & & | \end{bmatrix},$$

onde cada vetor coluna "$[T(b_j)]^{\mathcal{C}}$" é o vetor coluna das coordenadas de $T(b_j)$ na base $\mathcal{C}$.

Matrizes de transformações lineares

Teorema

A matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *satisfaz às seguinte propriedades:*

1. *Para todo* $j = 1, \ldots, n$, *vale que*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\,[b_j]^{\mathcal{B}} = [T(b_j)]^{\mathcal{C}}$$

2. *Mais geralmente, se* $v \in V$, *então*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\,[v]^{\mathcal{B}} = [T(v)]^{\mathcal{C}}$$

Além disso, o item (1) caracteriza completamente a matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, *no sentido de que se* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é tal que*

$$A\,[b_j]^{\mathcal{B}} = [T(b_j)]^{\mathcal{C}}$$

para todo j, *então* $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. *Similarmente para (2).*

Seja A uma matriz $m \times n$. Vamos mostrar que $A = [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ se, e somente se, $A[b_j]^{\mathcal{B}} = [T(b_j)]^{\mathcal{C}}$ para todo j.

Dado j, temos que

$$b_j = 0 \cdot b_1 + \cdots + 0 \cdot b_{j-1} + 1 \cdot b_j + 0 \cdot b_{j+1} + \cdot + 0 \cdot b_n,$$

e assim $[b_j]^{\mathcal{B}} = e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Matrizes de transformações lineares

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Então

$$A\,[b_1]^{\mathcal{B}} = Ae_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = 1^{\text{a}} \text{ coluna de } A$$

$$A\,[b_2]^{\mathcal{B}} = Ae_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = 2^{\text{a}} \text{ coluna de } A$$

Mais geralmente,

$$A\left[b_j\right]^{\mathcal{B}} = Ae_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} j\text{-ésima} \\ \text{coluna de } A. \end{array}$$

Portanto,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A\left[b_1\right]^{\mathcal{B}} & A\left[b_2\right]^{\mathcal{B}} & \cdots & A\left[b_n\right]^{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A\,[b_1]^{\mathcal{B}} & A\,[b_2]^{\mathcal{B}} & \cdots & A\,[b_n]^{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} A &= [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \\ &\iff \begin{bmatrix} | & & | \\ A\,[b_1]^{\mathcal{B}} & \cdots & A\,[b_n]^{\mathcal{B}} \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(b_1)]^{\mathcal{C}} & \cdots & [T(b_n)]^{\mathcal{C}} \\ | & & | \end{bmatrix} \\ &\iff A\,[b_j]^{\mathcal{B}} = [T(b_j)]^{\mathcal{C}} \text{ para todo } j \end{aligned}$$

Item (2) do teorema fica como exercício.

Teorema

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de V e W, respectivamente, e $T \in \mathrm{L}(V, W)$. Então

- $\operatorname{im}(T) = \left\{ w \in W : [w]^{\mathcal{C}} \in \operatorname{col}\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) \right\}$
- $\ker(T) = \left\{ v \in V : [v]^{\mathcal{B}} \in \operatorname{nul}\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) \right\}$ *(exercício)*

Lembre-se de que

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(T) &= T(V) \\ &= T(\operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_n\}) \\ &= \operatorname{span}\{T(b_1), \ldots, T(b_n)\} \end{aligned}$$

$$\operatorname{im}(T) = \operatorname{span}\{T(b_1), \ldots, T(b_n)\}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
w \in \operatorname{im}(T) &\iff w \in \operatorname{span}\{T(b_1), \ldots, T(b_n)\} \\
&\iff [w]^{\mathcal{C}} \in \operatorname{span}\left\{[T(b_1)]^{\mathcal{C}}, \ldots, [T(b_n)]^{\mathcal{C}}\right\} \\
&\iff [w]^{\mathcal{C}} \in \operatorname{col}\left(\begin{bmatrix} | & | & & | \\ [T(b_1)]^{\mathcal{C}} & [T(b_2)]^{\mathcal{C}} & \cdots & [T(b_n)]^{\mathcal{C}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}\right) \\
&\iff [w]^{\mathcal{C}} \in \operatorname{col}[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Espaço coluna e espaço imagem

Alternativa

Observação: Se $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ é uma matriz $m \times n$, então

$$\begin{aligned} \operatorname{col}(A) &= \{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ A\overline{x} : \overline{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \right\} \end{aligned}$$

Isso pode ser utilizado para dar outra prova da identificação entre espaço coluna e espaço imagem:

Espaço coluna e espaço imagem

Alternativa

$$
\begin{aligned}
w \in \operatorname{im}(T) &\iff w = T(v) \text{ para algum } v \in V \\
&\iff [w]^{\mathcal{C}} = [T(v)]^{\mathcal{C}} \text{ para algum } v \in V \\
&\iff [w]^{\mathcal{C}} = [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\,[v]^{\mathcal{B}} \text{ para algum } v \in V \\
&\iff [w]^{\mathcal{C}} = [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\,\overline{x} \text{ para algum } \overline{x} \in \mathbb{R}^n \\
&\iff [w]^{\mathcal{C}} \in \operatorname{col}\left([T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)
\end{aligned}
$$

$\Phi\colon \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathsf{L}(V, W)$

Teorema

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ordenadas de V e W, respectivamente. Então a função

$$\Phi\colon \mathsf{L}(V, W) \to \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

é um isomorfismo linear

Sejam $T, S \in \mathsf{L}(V, W)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Tome $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} + \lambda\,[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Devemos provar que $A = [T + \lambda S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Para isso, devemos verificar que

$$A\,[v]^{\mathcal{B}} = [(T + \lambda S)v]^{\mathcal{C}}$$

para todo $v \in V$.

Dado $v \in V$, temos

$$\begin{aligned} A\,[v]^{\mathcal{B}} &= \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} + \lambda\,[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)[v]^{\mathcal{B}} \\ &= \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\,[v]^{\mathcal{B}}\right) + \lambda\left([S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\,[v]^{\mathcal{B}}\right) \\ &= [T(v)]^{\mathcal{C}} + \lambda\,[S(v)]^{\mathcal{C}} \\ &= [T(v) + \lambda S(v)]^{\mathcal{C}} \\ &= [(T + \lambda S)(v)]^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

Isso mostra que $A = [T + \lambda S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Portanto Φ é linear.

Sabemos também que, se $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$,

$$\begin{aligned}
T = S \iff\ & T(b_j) = S(b_j) \text{ para todo } j \\
\iff\ & [T(b_j)]^{\mathcal{C}} = [S(b_j)]^{\mathcal{C}} \text{ para todo } j \\
\iff\ & \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(b_1)]^{\mathcal{C}} & \cdots & [T(b_n)]^{\mathcal{C}} \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [S(b_1)]^{\mathcal{C}} & \cdots & [S(b_n)]^{\mathcal{C}} \\ | & & | \end{bmatrix} \\
\iff\ & [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = [S]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, Φ é injetiva.

$\Phi\colon\ \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{L}(V, W)$

Seja $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Defina $T\colon V \to W$ na base $\mathcal{B}$ de modo que para todo j,

$$[T(b_j)]^{\mathcal{C}} = a_j.$$

Mais precisamente, para $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$,

$$\text{se} \quad A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}, \quad \text{então} \quad T(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i.$$

Assim, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A$.

Isso prova que Φ é sobrejetiva.

Teorema

Sejam U, V, W *espaços vetoriais com bases ordenadas* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, *respectivamente.*
Então para todas $T \in \mathrm{L}(U, V)$ *e* $S \in \mathrm{L}(V, W)$, *vale que*

$$[ST]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \, [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Para todo $u \in U$, vale que

$$\begin{aligned} \left([S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \, [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right) [u]^{\mathcal{A}} &= [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \left([T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \, [u]^{\mathcal{A}}\right) \\ &= [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \, [T(u)]^{\mathcal{B}} \\ &= [ST(u)]^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

Portanto, $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \, [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [ST]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

Um exemplo de cálculo

Considere:

- $\mathbb{R}^2$ com a base ordenada

$$\mathcal{A} = \{(2,3)\ ,\ (-3,1)\}\,.$$

- $\mathbb{R}^3$ com a base ordenada

$$\mathcal{B} = \{(1,0,-2)\ ,\ (0,1,2)\ ,\ (3,-3,0)\}$$

- A transformação linear $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$R(x,y) = (2x-2y, 2y, -3x-y)$$

Vamos encontre a matriz de R com relação às bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$:
Lembre-se:

- Elementos da base do domínio correspondem às colunas da matriz correspondente.
- Temos que calcular as imagens dos elementos de uma base e escrevê-las em função da outra.

Um exemplo de cálculo

$$\mathcal{A} = \{(2,3)\ ,\ (-3,1)\}\,.$$
$$\mathcal{B} = \{(1,0,-2)\ ,\ (0,1,2)\ ,\ (3,-3,0)\}$$
$$R(x,y) = (2x-2y, 2y, -3x-y)$$

$$R(2,3) = (-2,6,-9)$$

Para calcular a 1ª coluna da matriz $[R]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, devemos representar o vetor acima na base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$(-2,6,-9) = x(1,0,-2) + y(0,1,2) + z(3,-3,0)$$
$$\iff \begin{cases} x + 3z = -2 \\ \phantom{-2x+{}} y - 3z = 6 \\ -2x + 2y = -9 \end{cases}$$
$$\iff x = \frac{17}{4},\ y = -\frac{1}{4},\ z = -\frac{25}{12}$$

Um exemplo de cálculo

$$\mathcal{A} = \{(2,3)\ ,\ (-3,1)\}\,.$$

$$\mathcal{B} = \{(1,0,-2)\ ,\ (0,1,2)\ ,\ (3,-3,0)\}$$

$$R(x,y) = (2x-2y, 2y, -3x-y)$$

$$R(2,3) = \frac{17}{4}(1,0,-2) - \frac{1}{4}(0,1,2) - \frac{25}{12}(3,-3,0)$$

$$[R]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \frac{17}{4} & ? \\ -\frac{1}{4} & ? \\ -\frac{25}{12} & ? \end{bmatrix}$$

Repita o processo com o segundo vetor da base $\mathcal{A}$:

Um exemplo de cálculo

$$\mathcal{A} = \{(2,3)\ ,\ (-3,1)\}\,.$$

$$\mathcal{B} = \{(1,0,-2)\ ,\ (0,1,2)\ ,\ (3,-3,0)\}$$

$$R(x,y) = (2x-2y, 2y, -3x-y)$$

$$\begin{aligned}
R(-3,1) &= (-8,2,8)\\
&= x(1,0,-2) + y(0,1,2) + z(3,-3,0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 3z & = & -8\\ & & y & - & 3z & = & 2\\ -2x & + & 2y & & & = & 8 \end{array}\right.\\
&\iff x=-5,\ y=-1,\ z=-1
\end{aligned}$$

Um exemplo de cálculo

$$\mathcal{A} = \{(2,3)\ ,\ (-3,1)\}\,.$$

$$\mathcal{B} = \{(1,0,-2)\ ,\ (0,1,2)\ ,\ (3,-3,0)\}$$

$$R(x,y) = (2x-2y, 2y, -3x-y)$$

$$[R]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{17}{4} & -5 \\ -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{25}{12} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 51 & -60 \\ -3 & -12 \\ -25 & -12 \end{bmatrix}$$

E o caso “trivial”?

Qual a matriz da transformação

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & T(x,y,z,w) & = & (3x+y+z, x-z) \end{array}$$

com relação às bases canônicas?

Notação

Para transformações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, à matriz associada às bases canônicas é denotada simplesmente “$[T]$”.

Basta aplicar a definição!

$$\begin{array}{rclcl} T(1,0,0) & = & (3,1) & = & 3(1,0)+1(0,1) \\ T(0,1,0) & = & (1,0) & = & 1(1,0)+0(0,1) \\ T(0,0,1) & = & (1,-1) & = & 1(1,0)-1(0,1) \end{array}$$

E o caso "trivial"?

$$
\begin{array}{rclcl}
T(1,0,0) & = & (3,1) & = & 3(1,0)+1(0,1) \\
T(0,1,0) & = & (1,0) & = & 1(1,0)+0(0,1) \\
T(0,0,1) & = & (1,-1) & = & 1(1,0)-1(0,1)
\end{array}
$$

logo

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(A matriz de uma transformaçao de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^2$ é 2×3!)