Produtos internos, normas e ângulos

Álgebra Linear – Videoaula 17

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Falta uma noção geométrica

Um **vetor** é uma entidade matemática com direção, sentido e magnitude.

Num espaço vetorial, dois vetores v, w

- têm a mesma *direção* se um deles é múltiplo do outro.
- têm o mesmo *sentido* se $v = tw$ para algum $t \geq 0$ ou vice-versa.
- mas e a "magnitude"?

Falta uma noção geométrica

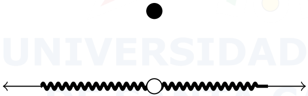
Em $\mathbb{R}^n$ existe uma noção de "tamanho" canônica:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Mas e em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

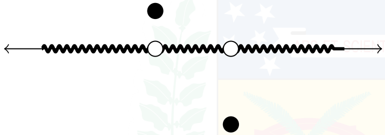
- Qual a "magnitude" de uma função delta de Kronecker?

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

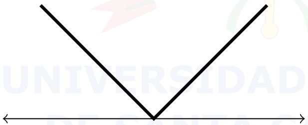


O que é "magnitude"?

- Qual a "magnitude" de $\frac{1}{2}\delta_0 - \delta_1$?



- Qual a "magnitude" de $I(x) = |x|$?



O que é “magnitude”?

- Qual a “magnitude” de

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}? \end{cases}$$

Ideia

Lembre-se que o "produto escalar" em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ satisfaz

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\theta),$$

onde

- $\|u\|$ é o comprimento de u;
- $\|v\|$ é o comprimento de v;
- θ é o ângulo entre u e v.

Problema

Como axiomatizar o "produto escalar" acima?

Produto interno

Definição

Um **produto interno** em um espaço vetorial V é uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

satisfazendo às seguinte propriedades:

- (Linearidade na primeira entrada) Para todos $u, v, b \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\langle u + \lambda v, b \rangle = \langle u, b \rangle + \lambda \langle v, b \rangle.$$
- (Simetria) Para todos $u, v \in V$,
$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle.$$
- (Positividade estrita) Para qualquer $v \neq 0_V$,
$$\langle v, v \rangle > 0.$$

Linearidade entrada-a-entrada?

Fixado $b \in V$, a "linearidade na primeira entrada" de um produto interno diz que a função

$$f(v) = \langle v, b \rangle$$

é linear

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= f(u) + \lambda f(v) \\ \langle u + \lambda v, b \rangle &= \langle u, b \rangle + \lambda \langle v, b \rangle \end{aligned}$$

Produtos internos também são lineares na segunda entrada: por simetria,

$$\langle a, u + \lambda v \rangle = \langle a, u \rangle + \lambda \langle a, v \rangle$$

Dizemos que produtos internos são **bilineares**.
Em particular,

$$\langle 0_V, v \rangle = \langle v, 0_V \rangle = 0$$

para qualquer $v \in V$.

Exemplos

O produto de $\mathbb{R}$ é um produto interno:

$$\langle x, y \rangle = xy$$

- Linearidade na primeira entrada:

$$\langle x + \lambda y, b \rangle = (x + \lambda y)b = xb + \lambda yb = \langle x, b \rangle + \lambda \langle y, b \rangle$$

- Simetria:

$$\langle x, y \rangle = xy = yx = \langle y, x \rangle$$

- Positividade estrita: Se $x \neq 0$, então

$$\langle x, x \rangle = xx = x^2 > 0$$

O produto interno **usual** de $\mathbb{R}^n$: Se $x = (x_i)_i = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_i)_i = (y_1, \ldots, y_n)$, então

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle \\ &= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

- Linearidade na primeira entrada: Para $x = (x_i)_i$, $y = (y_i)_i$ e $b = (b_i)_i$,

$$
\begin{aligned}
\langle x + \lambda y, b \rangle &= \sum_i ((x_i + \lambda y_i) b_i) \\
&= \sum_i (x_i b_i + \lambda y_i b_i) \\
&= \left(\sum_i x_i b_i \right) + \lambda \left(\sum_i y_i b_i \right) \\
&= \langle x, b \rangle + \lambda \langle y, b \rangle
\end{aligned}
$$

- Simetria: exercício

- Positividade estrita: Se $x = (x_i)_i \neq 0_n$, então escolha J tal que $x_J \neq 0$. Daí,

$$\langle x, x\rangle = \underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{x_J^2}_{> 0} + \cdots + \underbrace{x_n^2}_{\geq 0} > 0.$$

Terminologia e notação

O produto interno usual de $\mathbb{R}^n$ também se chama:

- *produto escalar*
- *produto interno canônico* ou *padrão*
- *produto interno Euclidiano*

e também se denota por

- $x \cdot y$;
- como $\begin{bmatrix} x_1 \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^n x_i y_i \right] = x \cdot y$, também se denota por $x^T y$ ou xy^T (dependendo se os vetores são escritos como linhas ou colunas).

Exemplos

Considere a função $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 3x_1x_2 + 4x_1y_2 + 4y_1x_2 + 9y_1y_2$$

O único problema é a positividade:

$$\begin{aligned}
\langle (x, y), (x, y)\rangle &= 3x^2 + 4xy + 4yx + 9y^2 \\
&= 3\left(x^2 + \frac{8}{3}xy\right) + 9y^2 \\
&= 3\left(x + \frac{4}{3}y\right)^2 - 3\frac{16}{9}y^2 + 9y^2 \\
&= 3\left(x + \frac{4}{3}y\right)^2 + \frac{11}{3}y^2
\end{aligned}$$

que é ≥ 0, e $= 0$ se, e somente se, $y = 0$ e $x = -\frac{4}{3}y = 0$.

Exemplos

Considere a mesma função do slide anterior:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 3x_1x_2 + 4x_1y_2 + 4y_1x_2 + 9y_1y_2$$

$$\begin{aligned}
\langle (x, y), (x, y) \rangle &= 3\left(x + \frac{4}{3}y\right)^2 + \frac{11}{3}y^2 \qquad \text{(como vimos)} \\
&= \frac{11}{9}x^2 + 9\left(\frac{4}{9}x + y\right)^2 \\
&= 2(x+y)^2 + 2y^2 + \frac{x^2}{5} + 5\left(\frac{2}{5}x + y\right)^2
\end{aligned}$$

Exemplos

Considere a função

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 + 4x_1y_2 + 4y_1x_2 + 6y_1y_2$$

$$\begin{aligned} \langle (x, y), (x, y) \rangle &= 2x^2 + 8xy + 6y^2 \\ &= 2(x + 2y)^2 - y^2, \end{aligned}$$

que pode ser negativo, por exemplo em $(x, y) = (-2, 1)$.

Exemplos

Considere a função

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 5x_1x_2 - 4x_1y_2 - 4y_1x_2 + 5y_1y_2$$

O único problema é a positividade:

$$\begin{aligned}
\langle (x, y), (x, y) \rangle &= 5x^2 - 4xy - 4xy + y^2 \\
&= 5x^2 - 8xy + y^2 \\
&= 5\left(x^2 - \frac{8}{5}xy\right) + y^2 \\
&= 5\left(x - \frac{4}{5}y\right)^2 - \frac{16}{25}y^2 + y^2 \\
&= 5\left(x - \frac{4}{5}y\right)^2 + \frac{9}{25}y^2
\end{aligned}$$

que é ≥ 0, e $= 0$ se, e somente se, $y = 0$ e $x = \frac{4}{5}y = 0$.

Se $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

é um produto interno, chamado de “produto L^2”.

EPIs

Definição

Um **espaço com produto interno (EPI)** é um espaço vetorial V munido de um produto interno "$\langle\cdot,\cdot\rangle$" sobre V.

Teorema

Se $v, w \in V$, com V um EPI, então

$$v = w \iff \langle v, x\rangle = \langle w, x\rangle \text{ para todo } x \in V.$$

$(\Rightarrow)$ é trivial.

$(\Leftarrow)$ A condição na direita com $x = v - w$ se reescreve como

$$0 = \langle v - w, x\rangle = \langle v - w, v - w\rangle$$

logo $v = w$.

Norma

Definição

Seja V um EPI. A **norma** de um vetor $v \in V$ é

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Dizemos que v é **unitário** se $\|v\| = 1$.

Cauchy–Schwarz

Teorema (Desigualdade de Cauchy–Schwarz)

Seja V um EPI. Então para quaisquer $u, v \in V$, vale que

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, u é múltiplo de v ou vice-versa.

Cauchy–Schwarz

Teorema

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Se $u = \alpha v$, então

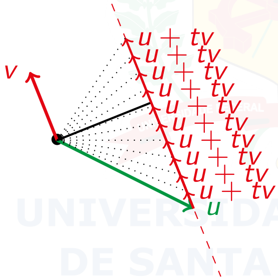
$$\begin{aligned}
\|u\|\|v\| &= \sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle} \\
&= \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle\langle v, v\rangle} \\
&= \sqrt{\alpha^2\langle v, v\rangle\langle v, v\rangle} \\
&= |\alpha\langle v, v\rangle| \\
&= |\langle \alpha v, v\rangle| \\
&= |\langle u, v\rangle|.
\end{aligned}$$

e similarmente se $v = \beta u$.

Teorema

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Se $v = 0_V = 0u$ então o resultado é trivial. Supomos $v \neq 0_V$.
A ideia é considerar vetores da reta que passa por u e v, e ver quão perto esses vetores chegam da origem.



Vamos analizar $\|u + tv\|$.

Teorema

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u + tv\|^2 \\ &= \langle u + tv, t + tv\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle + t^2\langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2t\langle u, v\rangle + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

A última expressão é polinomial! Em particular, vale para o ponto de mínimo, que é alcançado em $t = -\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$.

Vamos utilizar este valor.

Teorema

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Seja $t_0 = -\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$. Então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u + t_0 v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2t_0\langle u, v\rangle + t^2\|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^4}\|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2}, \end{aligned}$$

com igualdade se, e somente se, $u = -t_0 v = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} v$.

Cauchy–Schwarz

Teorema

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2},$$

ou, reordenando,

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

ou ainda, equivalentemente,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

com igualdade se, e somente se, $u = -t_0 v = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} v$.

Cauchy–Schwarz

Em $\mathbb{R}^n$ com produto escalar usual:

$$x \cdot y \leq \|x\|\|y\|$$

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + \cdots + y_n^2\right)$$

Em $C[0,1]$ com produto $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$:

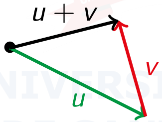
$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)\left(\int_0^1 g(x)^2 dx\right)$$

Norma

Teorema

A norma em um EPI satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\|v\| \geq 0$.
2. $\|v\| = 0$ *se, e somente se,* $v = 0_V$.
3. $\|\lambda v\| = |\lambda| \; \|v\|$.
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.



Norma

Teorema

A norma em um EPI satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\|v\| \geq 0$.
2. $\|v\| = 0$ *se, e somente se,* $v = 0_V$.
3. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$.
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

então (1) é trivial, e

$$\|v\| \iff \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0_V,$$

pela positividade estrita de produto interno. Isso é (2).

Norma

Teorema

A norma em um EPI satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\|v\| \geq 0$. ✓
2. $\|v\| = 0$ *se, e somente se,* $v = 0_V$. ✓
3. $\|\lambda v\| = |\lambda| \; \|v\|$.
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

3. $$\begin{aligned} \|\lambda v\| &= \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle}. \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= |\lambda| \|v\| \end{aligned}$$

Teorema

A norma em um EPI satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\|v\| \geq 0$. ✓
2. $\|v\| = 0$ *se, e somente se,* $v = 0_V$. ✓
3. $\|\lambda v\| = |\lambda| \; \|v\|$. ✓
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

4. $$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \qquad \text{(Cauchy–Schwarz)} \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

ou equivalentemente $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Distância

Definição

Dado um EPI V, a **distância** entre $v, w \in V$ é

$$d(v,w) = \|v - w\| = \sqrt{\langle v - w, v - w\rangle}.$$

Teorema

A distância em um EPI satisfaz:

1. $d(v,w) = 0 \iff v = w$;
2. *(simetria)* $d(v,w) = d(w,v)$
3. *(desigualdade triangular)* $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Norma

Definição

Uma **norma** em um espaço vetorial V é uma função

$$\|\cdot\|\colon V \to [0,+\infty), \qquad x \mapsto \|x\|$$

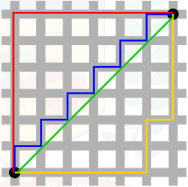
satisfazendo às seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. (não-degenerecência/positividade estrita) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0_V$.
2. (homogeneidade absoluta) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$.
3. (desigualdade triangular) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Só vamos nos preocupar com normas advindas de produtos internos, mas existem outras normas úteis.

- Temos a “norma do taxi” em $\mathbb{R}^n$: Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = |x|_1 + \cdots + |x_n|.$$

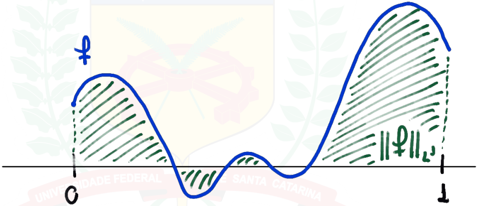


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Manhattan_distance.svg

Exemplos de normas

- Temos a "norma L^1" em $C[0,1]$ (funções contínuas em $[0,1]$):

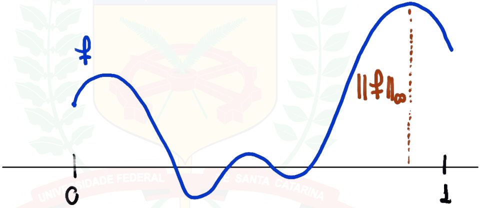
$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)|dt$$



Exemplos de normas

- Temos a "norma uniforme/infinito/do *sup*" em $C[0,1]$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

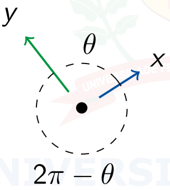


Ângulo "Euclidiano"

Lembre-se que "produto interno" é uma abstração do conceito de "produto escalar".
O "produto escalar" de $\mathbb{R}^3$ satisfaz

$$x \cdot y = |x||y| \cos(\theta)$$

onde $|x|$ e $|y|$ são os comprimentos (usuais) de x e y en $\mathbb{R}^3$, e θ é o ângulo entre x e y.



Ademais, sempre consideramos $\theta \in [0, \pi]$, i.e., $\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x||y|}\right)$.

Ângulo num EPI

Definição

Se V é um EPI e $u, v \in V$ são vetores não-nulos, então o **ângulo** entre u e v é

$$\arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right).$$

Exemplo de ângulo

Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno

$$\langle (a,b),(c,d)\rangle = 68ac + 38ad + 38bc + 72bd$$

e os vetores

$$u = (2,9) \qquad \text{e} \qquad v = (5,4)$$

Então

- $\langle u, v\rangle = 5286$
- $\langle u, u\rangle = 7472$, logo $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = 4\sqrt{467}$
- $\langle v, v\rangle = 4372$, logo $\|v\| = 2\sqrt{1093}$

e o ângulo entre esses vetores é

$$\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{5286}{4\sqrt{467}\cdot 2\sqrt{1093}}\right) \approx 0,390170\ldots$$