Ortogonalidade e Gram–Schmidt

Álgebra Linear – Videoaula 18

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Ângulo num EPI

Definição

Se V é um EPI e $u, v \in V$ são vetores não-nulos, então o **ângulo** entre u e v é

$$\arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right).$$

Definição

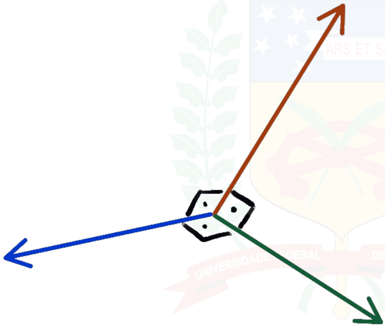
Dois vetores u, v são **ortogonais** ou **perpendiculares** se

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

Escrevemos "$u \perp v$" para dizer que u e v são ortogonais.

Para vetores não-nulos, vetores são ortogonais se o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{2}$.

Vetores ortogonais



Exemplo

Os vetores

$$o = (6, -27, 14)$$
$$p = (-21, -14, -18)$$
$$q = (22, -6, -21)$$

são ortogonais em $\mathbb{R}^3$ (com produto canônico). De fato,

$$\langle o, p\rangle = 6(-21) + (-27)(-14) + 14(-18) = -126 + 378 - 252 = 0$$
$$\langle o, q\rangle = 6 \cdot 22 + (-27)(-6) + 14(-21) = 132 + 162 - 294 = 0$$
$$\langle p, q\rangle = (-21)22 + (-14)(-6) + (-18)(-21) = -462 + 84 + 378 = 0$$

Teorema de Pitágoras

Teorema

Seja V um EPI.

1. *Se $u \perp v$ então $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;*
2. *Mais geralmente, se $u_1, \ldots, u_n$ são dois-a-dois ortogonais, então*

$$\|u_1 + u_2 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2$$

3. *Mais mais geralmente, se $u_1, \ldots, u_n$ são dois-a-dois ortogonais e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, então*

$$\|\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n\|^2 = |\alpha_1|^2 \|u_1\|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 \|u_n\|^2$$

Teorema de Pitágoras

Teorema

Seja V um EPI.

1. *Se $u \perp v$ então $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;*
2. *Mais geralmente, se $u_1, \ldots, u_n$ são dois-a-dois ortogonais, então*
$$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$$
3. *Mais mais geralmente, se $u_1, \ldots, u_n$ são dois-a-dois ortogonais e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, então*
$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \|u_i\|^2$$

Teorema de Pitágoras

Se $u \perp v$, então

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\ &= \langle u,u \rangle + 2\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Ortogonalidade e independência linear

Teorema

Se $v_1, \dots, v_n$ são vetores não-nulos e dois-a-dois ortogonais num EPI V, então $v_1, \dots, v_n$ são LI.

Tome $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$$

ou seja,

$$\|\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\| = \|0_V\|.$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\alpha_1^2 \|v_1\|^2 + \cdots + \alpha_n^2 \|v_n\|^2 = 0$$

o que só é possível se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Ortogonalidade e independência linear

Definição

Se V é um EPI, uma coleção de vetores $X \subseteq V$ é

1. **ortogonal** se seus elementos são dois-a-dois ortogonais.
2. **ortonormal** se for ortogonal e seus elementos forem todos unitários (de norma 1).

Teorema (Pitágoras para vetores ortonormais)

Suponha que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma família ortonormal de vetores.

- $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é LI*
- *Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, temos que*

$$\|\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$$

Bases ortonormais

Definição

Uma **base ortonormal** de um EPI V é uma base que também é ortonormal.

Por exemplo, o subconjunto $\{o', p', q'\}$ de $\mathbb{R}^3$, onde

$$
\begin{aligned}
o' &= \frac{1}{31}(6, -27, 14) \\
p' &= \frac{1}{31}(-21, -14, -18) \\
q' &= \frac{1}{31}(22, -6, -21)
\end{aligned}
$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (com PI usual).

Coordenadas ortonormais

Teorema

Seja $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *uma base ortonormal do EPI* V.

1. *Para todo* $v \in V$,
$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i,$$
2. *Para quaisquer* $v, w \in V$,
$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \langle u_i, w \rangle$$
3. *Para todo* $v \in V$,
$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i \rangle|^2$$

Item (3) segue de (1) e Teorema de Pitágoras.

Como $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ é base, escrevemos

$$v = \sum_{i=1}^n r_i u_i = r_1 u_1 + \cdots + r_n u_n$$

Tomando produto interno com u_j, temos

$$\begin{aligned} \langle v, u_j \rangle &= r_1 \langle u_1, u_j \rangle + \cdots + r_j \langle u_j, u_j \rangle + \cdots + r_n \langle u_n, u_j \rangle \\ &= r_j \|u_j\|^2 = r_j \end{aligned}$$

Pelo item (1),

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle v, u_i\rangle u_i, \sum_{j=1}^n \langle w, u_j\rangle u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle v, u_i\rangle\langle w, u_j\rangle\langle u_i, u_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v, u_i\rangle\langle w, u_j\rangle
\end{aligned}$$

Se $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ é base ortonormal ordenada, então para todo $v \in V$ temos que

- $[v]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n \rangle \end{bmatrix}$,
- $\langle v, w \rangle = [v]^{\mathcal{B}} [w]^{\mathcal{B}}$,
- $\|v\| = \left| [v]^{\mathcal{B}} \right|$ (norma usual de $\mathbb{R}^n$),

ou seja, o isomorfismo $\mathcal{B}$-coordenado "transforma" o produto interno de V no produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.

Mas como encontrar uma base ortonormal?

Gram–Schmidt

Passo-a-passo

Teorema (Passo ortonormal de Gram–Schmidt)

Sejam $u_1, \ldots, u_n$ *vetores ortonormais de um EPI* V *e* $v \notin \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Então

1. *O vetor* $u' = v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$ *é não-nulo;*
2. *O vetor* $u = \dfrac{1}{\|u'\|} u'$ *é unitário;*
3. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u\}$ *é ortonormal, e*

$$\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n, v\} = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n, u\}$$

Teorema (Passo ortonormal de Gram–Schmidt)

Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores ortonormais de um EPI V e $v \notin \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$.
Então

1. *O vetor $u' = v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$ é não-nulo;*

Caso u' fosse nulo, v seria uma combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$, contradizendo a hipótese de que $v \notin \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Teorema (Passo ortonormal de Gram–Schmidt)

Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores ortonormais de um EPI V e $v \notin \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$.
Então

2. *O vetor $u = \dfrac{1}{\|u'\|} u'$ é unitário;*

Trivial:

$$\|u\| = \left\| \frac{1}{\|u'\|} u' \right\| = \frac{1}{\|u'\|} \|u'\| = 1.$$

Teorema (Passo ortonormal de Gram–Schmidt)

Sejam $u_1, \dots, u_n$ *vetores ortonormais de um EPI* V *e* $v \notin \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$.
Então

3. $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u\}$ *é ortonormal, e*

$$\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n, v\} = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n, u\}$$

Como

$$u' = v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i,$$

ou, equivalentemente,

$$v = u' - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i,$$

então

$$\operatorname{span}\left\{u_1, \ldots, u_n, v\right\} = \operatorname{span}\left\{u_1, \ldots, u_n, u'\right\}.$$

Como

$$u = \frac{1}{\|u'\|} u'$$

ou, equivalentemente,

$$u' = \|u'\| u,$$

então

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n, v\} &= \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n, u'\} \\ &= \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n, u\}. \end{aligned}$$

Para todo j, temos que

$$\begin{aligned}\langle u', u_j\rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{n}\langle v, u_i\rangle u_i, u_j\right\rangle \\ &= \langle v, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle v, u_i\rangle\langle u_i, u_j\rangle \\ &= \langle v, u_j\rangle - \langle v, u_j\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Então $u' \perp u_j$ para todo j. Como u é múltiplo de u', então $u \perp u_j$ para todo j.
Portanto, $\{u_1, \ldots, u_n, u\}$ é ortogonal, além de seus elementos serem normais. Ou seja, é ortonormal.

Definição

Dados vetores ortonormais $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $v \notin \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$, o **passo ortonormal de Gram–Schmidt** consiste da calcular o vetor u por meio de

$$u' = v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$$

e

$$u = \frac{1}{\|u'\|} u'.$$

Note que:

- se $v \perp u_j$ para todo j, então construímos $\frac{1}{\|v\|} v$, i.e., o passo ortonormal de Gram–Schmidt normaliza v.
- Se $v \perp u_j$ para todo j e v já é unitário, então o passo ortonormal de Gram–Schmidt deixa v inalterado.

Teorema

Sejam $v_1, \ldots, v_n$ vetores de uma base de um EPI V.
Considere os seguintes vetores:

- $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$;
- *Dados $u_1, \ldots, u_k$, o vetor u_{k+1} é obtido aplicando a passo ortonormal de Gram–Schmidt no vetor em v_{k+1} com relação a $\{u_1, \ldots, u_k\}$.*

Os vetores $u_1, \ldots, u_n$ assim construídos formam uma base ***ortonormal*** *para V.*

O procedimento acima é chamado de **Processo de ortonormalização de Gram–Schmidt**.

De fato:

- <u>1º passo:</u> Como $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$, então $\{u_1\}$ é ortonormal e $\operatorname{span}\{u_1\} = \operatorname{span}\{v_1\}$.
- <u>2º passo:</u> Aplicando o passo ortonormal de Gram–Schmidt no vetor v_2 com relação a $\{u_1\}$, sabemos que o vetor u_2 construído satisfaz
  - $\{u_1, u_2\}$ é ortonormal, e
  - $\operatorname{span}\{u_1, u_2\} = \operatorname{span}\{u_1, v_2\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.
- <u>3º passo:</u> Aplicando o passo ortonormal de Gram–Schmidt no vetor v_3 com relação a $\{u_1, u_2\}$, sabemos que o vetor u_3 satisfaz
  - $\{u_1, u_2, u_3\}$ é ortonormal, e
  - $\operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2, v_3\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

- Após k-ésimo passo, os vetores $u_1, \ldots, u_k$ satisfazem
  - $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é ortonormal;
  - $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

- $(k+1)$-ésimo passo: Aplicando o passo ortonormal de Gram–Schmidt no vetor v_{k+1} com relação a $\{u_1, \ldots, u_k\}$, sabemos que o vetor u_{k+1} construído satisfaz
  - $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}\}$ é ortonormal, e
  - $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}\} = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}\}$.

$$= \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$$

Após o n-ésimo passo, teremos vetores $u_1, \dots, u_n$ que satisfazem

- $\{u_1, \dots, u_n\}$ é ortonormal;
- $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$.

Em particular, $u_1, \dots, u_n$ são LI, e geram o espaço V, que tem dimensão n.

Portanto, $u_1, \dots, u_n$ formam uma base ortonormal para V.

Estendendo conjuntos ortonormais para bases

Teorema

Sejam $u_1, \ldots, u_m$ vetores ortonormais de um EPI V de dimensão finita. Então é possível estender $u_1, \ldots, u_m$ para uma base ortonormal $u_1, \ldots, u_m, w_{m+1}, \ldots, w_n$ de V

Estenda $u_1, \ldots, u_m$ para uma base (não-ortonormal)

$$u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_m$$

e aplique Gram–Schmidt.

Como os primeiros m passos são aplicados em $u_1, \ldots, u_m$, que já são ortonormais, o processo os deixa inalterados. Mas os v_j podem ser alterados.

No fim, temos uma base ortonormal da forma $u_1, \ldots, u_m, w_{m+1}, \ldots, w_n$.

Variações de Gram–Schmidt

O "processo ortogonal de Gram–Schmidt" é uma variação que ortogonaliza vetores (sem normalizá-los).

Teorema (Passo ortogonal de Gram–Schmidt)

Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores ortogonais não-nulos de um EPI V e $v \in V$. Então o vetor

$$u = v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$$

é não-nulo e

$$\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n, v\} = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n, u\}$$

Esse passo pode ser aplicado para criar bases ortogonais (não-normalizadas).

Variações de Gram–Schmidt

Gram–Schmidt também pode ser aplicado a uma família linearmente dependente de vetores:

Teorema

Sejam $u_1, \ldots, u_m$ vetores não-nulos de um EPI V. Defina $w_1, \ldots, w_m$ do seguinte modo:

- *<u>1º passo:</u>* $w_1 = u_1 \quad$ *(ou* $\frac{u_1}{\|u_1\|} u_1$*).*
- *<u>k-ésimo passo:</u>* w_k *é obtido aplicando um passo de Gram–Schmidt em* u_k *relativo aos* w_i *construídos anteriormente não-nulos.*

Então os w_i não-nulos formam uma base ortogonal ou ortonormal para span $\{u_1, \ldots, u_m\}$*, e $w_k = 0_V$ se, e somente u_k é uma combinação linear dos u_i anteriores ($i < k$).*

Exemplos

Vamos encontrar uma base ortonormal (com respeito ao produto escalar usual) para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores

$$a = (0, 3, -1, 1)$$
$$b = (2, -1, -3, 1)$$
$$c = (2, -2, -1, -1)$$

aplicando Gram–Schmidt:

- 1º passo:
  - $\|a\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$
  - $u_1 = \frac{1}{\|a\|} a = \frac{1}{\sqrt{11}} (0, 3, -1, 1)$.

Exemplos

$$
\begin{aligned}
a &= (0, 3, -1, 1) \\
b &= (2, -1, -3, 1) \\
c &= (2, -2, -1, -1)
\end{aligned}
$$

- <u>1º passo:</u> $u_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(0, 3, -1, 1)$.
- <u>2º passo:</u> $u_2' = b - \langle b, u_1 \rangle u_1$
  - $$
\begin{aligned}
\langle b, u_1 \rangle &= \left\langle (2, -1, -3, 1), \frac{1}{\sqrt{11}}(0, 3, -1, 1) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{11}}(2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{11}}(-3 + 3 + 1) = \frac{1}{\sqrt{11}}
\end{aligned}
$$

Exemplos

$$a = (0, 3, -1, 1)$$
$$b = (2, -1, -3, 1)$$
$$c = (2, -2, -1, -1)$$

- 1º passo: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(0, 3, -1, 1)$.
- 2º passo: $u_2' = b - \langle b, u_1 \rangle u_1$
  - $\langle b, u_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{11}}$
  - $\langle b, u_1 \rangle u_1 = \frac{1}{11}(0, 3, -1, 1)$
  - $u_2' = b - \langle b, u_1 \rangle u_1$

$$= (2, -1, -3, 1) - \frac{1}{11}(0, 3, -1, 1)$$
$$= \frac{1}{11}(22, -14, -32, 10)$$

  - $\|u_2'\| = \frac{1}{11}\sqrt{22^2 + (-14)^2 + (-32)^2 + 10^2} = \frac{\sqrt{1804}}{11} = \frac{2\sqrt{451}}{11}$
  - $u_2 = \frac{1}{\|u_2'\|}u_2 = \frac{1}{2\sqrt{451}}(22, -14, -32, 10)$

Exemplos

$$
\begin{aligned}
a &= (0, 3, -1, 1) \\
b &= (2, -1, -3, 1) \\
c &= (2, -2, -1, -1)
\end{aligned}
$$

- <u>1º passo:</u> $u_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(0, 3, -1, 1)$.
- <u>2º passo:</u> $u_2 = \frac{1}{2\sqrt{451}}(22, -14, -32, 10)$
- <u>3º passo:</u>
  - $\langle c, u_1 \rangle u_1 = -\frac{6}{\sqrt{11}} u_1 = -\frac{6}{11}(0, 3, -1, 1)$
  - $\langle c, u_2 \rangle u_2 = \frac{47}{\sqrt{451}} u_2 = \frac{47}{451}(11, -7, -16, 5)$
  - $u_3' = c - \sum_{i=1}^{2} \langle c, u_i \rangle u_i = \frac{1}{451}(385, 165, 55, -440)$
  - $u_3 = \frac{1}{\|u_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{123}}(7, 3, 1, -8)$