Complementos ortogonais e projeções ortogonais

Álgebra Linear – Videoaula 19

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Seja V um EPI. Para cada $v \in V$, a transformação

$$x \mapsto \langle v, x \rangle$$

é linear. Qual o seu núcleo?

Definição

Seja V um EPI.

- (Revisão) Dois vetores $u, v \in V$ são **ortogonais** se $\langle u, v \rangle = 0$. Escrevemos $u \perp v$.
- Dois subconjuntos $X, Y \subseteq V$ são **ortogonais** se $x \perp y$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$. Escrevemos $X \perp Y$.
- Escrevemos $v \perp X$ (ou $X \perp v$) se $\{v\} \perp X$.
- O **complemento ortogonal** de $X \subseteq V$ é

$$X^\perp = \{v \in V : v \perp X\}$$

Teorema

Seja V um EPI.

1. *O complemento ortogonal $X^\perp$ de qualquer subconjunto $X \subseteq V$ é um subespaço de V.*
2. *Para cada subespaço W de V, vale que*

$$W \cap W^\perp = \{0_V\}$$

Para cada $x \in X$, considere a transformação linear

$$T_x \colon V \to \mathbb{R}, \qquad T_x(v) = \langle v, x \rangle.$$

Note que $X^\perp = \bigcap_{x \in X} \ker(T_x)$, uma intersecção de subespaços, logo um subespaço vetorial.

Se $v \in W \cap W^\perp$, então $\langle v, v \rangle = 0$, logo $v = 0_V$ (pela positividade estrita do produto). Portanto $W \cap W^\perp = \{0_V\}$.

Segue que a soma $W + W^\perp$ é sempre direta.

Pergunta

Quando que um EPI V é $V = W \oplus W^\perp$ para $W \subseteq V$ subespaço?

Teorema

Seja $V = U \oplus W$. São equivalentes:

1. $U \perp W$;
2. $W = U^\perp$;
3. $U = W^\perp$.

Basta provar (1)$\Rightarrow$(2).

Teorema

Seja $V = U \oplus W$. São equivalentes:

1. $U \perp W$;
2. $W = U^{\perp}$;
3. $U = W^{\perp}$.

<u>(1)⇒(2):</u>
Se $U \perp W$, então $W \subseteq U^{\perp}$. Daí

$$V = U \oplus W \subseteq U \oplus U^{\perp} \subseteq V.$$

Logo as inclusões são igualdades, $U \subseteq U$ e $W \subseteq U^{\perp}$ $\xRightarrow{\text{Elon, ex. 2.34}} W = U^{\perp}$.

Teorema

Seja $V = U \oplus W$. São equivalentes:

1. $U \perp W$;
2. $W = U^{\perp}$;
3. $U = W^{\perp}$.

<u>(1)⇒(2)</u>:
Alternativamente, se $U \perp W$, então $W \subseteq U^{\perp}$.
Se $v \in U^{\perp}$, então $v = u + w$, onde $u \in U, w \in W$. Mas daí

$$0 = \langle v, u \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, u \rangle,$$

logo $u = 0_V$ e $v = w \in W$.

Definição

Seja V um espaço vetorial. Uma **projeção** é uma transformação linear $P\colon V \to V$ tal que $P^2 = P$. (Também se diz que P é **idempotente**.) Se $W = P(V)$, dizemos que P é uma projeção **sobre** W.

Por exemplo:

1. Se $V = X \oplus Y$, pondo, para todos $x \in X$ e $y \in Y$

$$P_X(x+y) = x, \qquad P_Y(x+y) = y$$

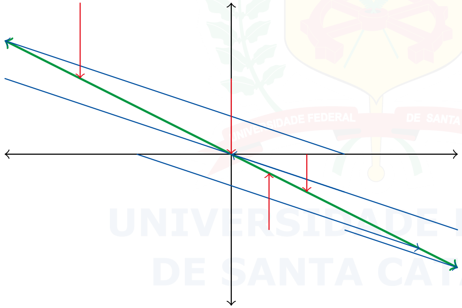
   então P_X e P_Y são projeções.

2. Se P é uma projeção, então $V = \operatorname{im}(P) \oplus \ker(P)$, e $P(x+y) = x$ para $x \in \operatorname{im}(P)$ e $y \in \ker(P)$.

3. As transformações $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$P(x,y) = (-2x - 6y, x + 3y) \quad \text{e} \quad Q(x,y) = \left(x, -\frac{1}{2}x\right)$$

são projeções distintas sobre o mesmo subespaço $\operatorname{span}\{(-2,1)\}$.



Projeções ortogonais

Definição

Uma projeção $P\colon V \to V$ em um EPI é dita ser uma **projeção ortogonal** se $(v - P(v)) \perp \operatorname{im}(P)$ para todo $v \in V$.

Teorema

Para cada subespaço W de um EPI V, existe no máximo uma única projeção ortogonal sobre W.

Note que se P é uma projeção ortogonal sobre W, então para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$,

$$\langle v - P(v), w \rangle = 0, \qquad \text{ou seja,} \qquad \langle v, w \rangle = \langle P(v), w \rangle.$$

Suponha que P_1, P_2 são projeções ortogonais de V sobre W. Então para qualquer $v \in V$,

1. $\langle v, P_1(v)\rangle = \langle P_1(v), P_1(v)\rangle$;
2. $\langle v, P_2(v)\rangle = \langle P_1(v), P_2(v)\rangle$;
3. $\langle v, P_1(v)\rangle = \langle P_2(v), P_1(v)\rangle$;
4. $\langle v, P_2(v)\rangle = \langle P_2(v), P_2(v)\rangle$.

Segue que

$$\begin{aligned}\|P_1(v) - P_2(v)\|^2 &= \langle P_1(v), P_1(v)\rangle - \langle P_1(v), P_2(v)\rangle \\ &\quad - \langle P_2(v), P_1(v)\rangle + \langle P_2(v), P_2(v)\rangle \\ &= \langle v, P_1(v)\rangle - \langle v, P_2(v)\rangle - \langle v, P_1(v)\rangle + \langle v, P_2(v)\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

logo $P_1(v) = P_2(v)$, qualquer que seja v.

Definição

Sejam V um EPI e W um subespaço. Quando existir, a projeção ortogonal de W em V é denotada por $\mathrm{proj}_W \colon V \to V$.

Teorema

Sejam V um EPI, W um subespaço de dimensão finita e $\mathcal{O} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ uma base ortonormal para W. Então existe a projeção ortogonal de V sobre W, que é dada por

$$P(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Note que

- Se $w \in W$, então $P(w) = w$;
- Se $v \in V$, então $P(v) \in W$, logo $P(P(v)) = P(v)$.
- Portanto $P^2 = P$, ou seja, P é uma projeção.

Dados $v \in V$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle P(v), u_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \langle v, u_j \rangle \end{aligned}$$

Assim, $\langle P(v) - v, u_j \rangle = 0$ para qualquer j, i.e., $(P(v) - v) \perp u_j$.
$\xRightarrow{\text{combinações lineares}} (P(v) - v) \perp W$ para todo $v \in V$.

Teorema

Seja $\operatorname{proj}_W : V \to V$ *uma projeção ortogonal em um EPI* V*.*

1. $w = \operatorname{proj}_W(v)$ *é o **único** vetor de* W *para o qual* $(v - w) \perp W$*.*
2. $\operatorname{proj}_W(v)$ *é a **melhor aproximação** de* v *em* W*, no sentido de que se* $w \in W \setminus \{\operatorname{proj}_W(v)\}$*, então* $\|v - \operatorname{proj}_W(v)\| < \|v - w\|$*.*
3. ***Desigualdade de Bessel:*** $\|\operatorname{proj}_W(v)\| \leq \|v\|$*.*

O problema de (1) é mostrar a unicidade do vetor $w \in W$ tal que $(v - w) \perp W$.

Suponha que $w_1, w_2 \in W$ são tais que $(v - w_i) \perp W$, i.e., $(v - w_i) \in W^\perp$ para $i = 1, 2$. Então

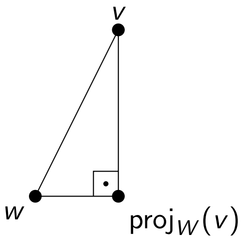
$$w_1 - w_2 \in W, \qquad \text{e} \qquad w_1 - w_2 = (v - w_2) - (v - w_1) \in W^\perp,$$

logo $w_1 = w_2$.

Projeções ortogonais

Propriedades: 2. $\operatorname{proj}_W(v)$ é a **melhor aproximação** de v em W, no sentido de que se $w \in W \setminus \{\operatorname{proj}_W(v)\}$, então $\|v - \operatorname{proj}_W(v)\| < \|v - w\|$.

Nas hipóteses do item (2):



Como $(v - \operatorname{proj}_W(v)) \perp (\operatorname{proj}_W(v) - w)$, então

$$\begin{aligned}
\|v - w\|^2 &= \|(v - \operatorname{proj}_W(v)) + (\operatorname{proj}_W(v) - w)\|^2 \\
&= \|v - \operatorname{proj}_W(v)\|^2 + \|\operatorname{proj}_W(v) - w\|^2 \\
&> \|v - \operatorname{proj}_W(v)\|^2,
\end{aligned}$$

logo $\|v - w\| > \|v - \operatorname{proj}_W(v)\|$.

Projeções ortogonais

Propriedades: 3. **Desigualdade de Bessel**: $\|\operatorname{proj}_W(v)\| \leq \|v\|$.

Como $(v - \operatorname{proj}_W(v)) \perp \operatorname{proj}_W(v)$, então

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \|(v - \operatorname{proj}_W(v)) + \operatorname{proj}_W(v)\|^2 \\ &= \|(v - \operatorname{proj}_W(v))\|^2 + \|\operatorname{proj}_W(v)\|^2 \\ &\geq \|\operatorname{proj}_W(v)\|^2,\end{aligned}$$

portanto $\|v\| \geq \|\operatorname{proj}_W(v)\|$.

Teorema (Desigualdade de Bessel em dimensão finita)

Sejam V um EPI e $\mathcal{O} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ um subconjunto ortonormal. Então

$$\sum_{i=1}^{m} \langle v, e_i \rangle^2 \leq \|v\|^2.$$

Expansão de Fourier

Definição

Se $\mathcal{O} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ é um subconjunto ortonormal de um EPI V e $v \in V$, chamamos

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_{\operatorname{span}\mathcal{O}}(v) &= \sum_{i=1}^{m} \langle v, e_i \rangle e_i \\ &= \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_m \rangle e_m\end{aligned}$$

de **expansão de Fourier de v com respeito a $\mathcal{O}$**.

Decomposição ortogonal

Teorema (Teorema da decomposição ortogonal)

Sejam V um EPI e $W \subseteq V$ um subespaço. Então V se decompõe como

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

se, e somente se, existe a projeção ortogonal proj_W *de V sobre W.*

Se $V = W \oplus W^\perp$, então a transformação

$$P\colon V \to V, \quad P(x+y) = x \quad \text{para} \quad x \in W, y \in W^\perp,$$

é a projeção ortogonal de V em W:

- $P(P(x+y)) = P(x) = P(x+0_V) = P(x+y)$
- Se $v = x + y \in V$, então

$$v - P(v) = v - x = y \in W^\perp$$

  ou seja, $(v - P(v)) \perp W$.

Decomposição ortogonal

Se existe a projeção ortogonal proj_W, então para todo $v \in V$ temos $(v - \text{proj}_W(v)) \in W^{\perp}$ e

$$v = \underbrace{(v - \text{proj}_W(v))}_{\in W^{\perp}} + \underbrace{\text{proj}_W(v)}_{\in W},$$

portanto $V = W + W^{\perp}$. Já sabemos que $W \cap W^{\perp} = \{0_V\}$, logo $V = W \oplus W^{\perp}$.

Teorema

Sejam V um EPI e proj_W uma projeção ortogonal sobre um subespaço W. Então

1. *Para todos $v \in V$ e $w \in W$, vale que*

$$\langle v, w \rangle = \langle \text{proj}_W(v), w \rangle$$

2. $(W^\perp)^\perp = W$
3. $\text{proj}_{W^\perp} = \text{id}_V - \text{proj}_W$
4. $W^\perp = \ker(\text{proj}_W)$

Item já foi visto no slide 10.

Já sabemos que $V = W \oplus W^{\perp}$, onde $(W^{\perp}) \perp W$.

Pelo Teorema do slide 5 com $U = W^{\perp}$, obtemos $W = U^{\perp} = (W^{\perp})^{\perp}$.

Isto termina o item (2).

Como $V = W^\perp \oplus W = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp$, o teorema do slide 21 implica que existe a projeção ortogonal $\text{proj}_{W^\perp}$.

Dado $v \in V$, seja $k = v - \text{proj}_W(v)$. Então

$$k \perp W$$

ou seja,

- $k \in W^\perp$

- $k \in W^\perp$

Além disso,

$$v - k = \mathrm{proj}_W(v) \perp W^\perp$$

ou seja,

- $(v - k) \perp W^\perp$

Pela parte de unicidade do teorema do slide 15(1), obtemos

$$\mathrm{proj}_{W^\perp}(v) = k = v - \mathrm{proj}_W(v)$$

para qualquer v.
Isso significa que $\mathrm{proj}_{W^\perp} = \mathrm{id}_V - \mathrm{proj}_W$, que é o item (3).

Como $\mathrm{proj}_{W^\perp} = \mathrm{id}_V - \mathrm{proj}_W$, então

$$
\begin{aligned}
v \in W^\perp &\iff \mathrm{proj}_{W^\perp}(v) = v \\
&\iff (\mathrm{id}_V - \mathrm{proj}_W)(v) = v \\
&\iff v - \mathrm{proj}_W(v) = v \\
&\iff \mathrm{proj}_W(v) = 0_V \\
&\iff v \in \ker(\mathrm{proj}_W)
\end{aligned}
$$

Caracterizando bases ortonormais

Teorema

Seja $\mathcal{O} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *um subconjunto ortonormal de um EPI* V *e* $W = \operatorname{span}(\mathcal{O})$*. São equivalentes:*

1. $\mathcal{O}$ *é uma base ortonormal para* V*;*
2. $\mathcal{O}^\perp = \{0_V\}$*;*
3. *Todo* $v \in V$ *é igual à sua expansão de Fourier com respeito a* $\mathcal{O}$*:*

$$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n$$

(continua...)

Teorema (. . . continuação)

4. *Para todo $v \in V$, vale a* ***identidade de Parseval*** *(versão 1):*

$$\|v\|^2 = \langle v, e_1 \rangle^2 + \cdots + \langle v, e_n \rangle^2$$

5. *Para todos $v, w \in V$, vale a* ***identidade de Parseval*** *(versão 2):*

$$\langle v, w \rangle = \langle v, e_1 \rangle \langle w, e_1 \rangle + \cdots + \langle v, e_n \rangle \langle w, e_n \rangle$$

Caracterizando bases ortonormais

1. $\mathcal{O}$ é uma base ortonormal para V;
2. $\mathcal{O}^\perp = \{0_V\}$;
3. Todo $v \in V$ é igual à sua expansão de Fourier com respeito a $\mathcal{O}$:

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

---

(1)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(2) já sabemos.

Se (2) vale, então

$$(\operatorname{span} \mathcal{O})^\perp = \ker(\operatorname{proj}_{\operatorname{span} \mathcal{O}}) = \mathcal{O}^\perp = \{0_V\}.$$

Mas daí

$$\operatorname{span} \mathcal{O} = \{0_V\}^\perp = V,$$

logo $\mathcal{O}$ é gerador e ortonormal, portanto uma base ortonormal.

Caracterizando bases ortonormais

1. $\mathcal{O}$ é uma base ortonormal para V;
2. $\mathcal{O}^\perp = \{0_V\}$;
4. Para todo $v \in V$, vale a **identidade de Parseval** (versão 1):

$$\|v\|^2 = \langle v, e_1\rangle^2 + \cdots + \langle v, e_n\rangle^2$$

5. Para todos $v, w \in V$, vale a **identidade de Parseval** (versão 2):

$$\langle v, w\rangle = \langle v, e_1\rangle\langle w, e_1\rangle + \cdots + \langle v, e_n\rangle\langle w, e_n\rangle$$

---

(1)$\Rightarrow$(5) $\Rightarrow$(4) $\Rightarrow$(2) são fáceis, e acabamos de ver (2)$\Rightarrow$(1).