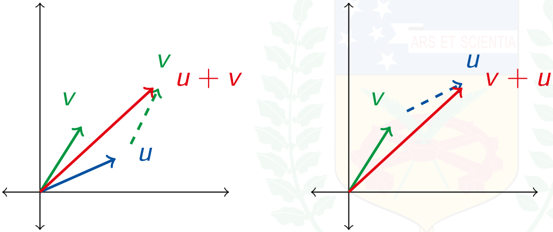
Espaços Vetoriais
Álgebra Linear – Videoaula 1

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Podemos operar com vetores de modo geométrico:



e portanto segue que $u + v = v + u$ para quaisquer vetores u, v.

Objetivo

Procurar estruturas algébricas que possam ser interpretadas geometricamente como acima.

Um **espaço vetorial** consiste de um conjunto não vazio V – cujos elementos são chamados de **vetores** – munido de duas operações:

- A **soma** ou **adição** de vetores, que a cada par de vetores u, v faz corresponder um novo vetor $u + v$, chamado de **soma** de u e v.
- A **multiplicação** ou **produto por escalar**, que a cada vetor v e a cada número real λ associa um novo vetor λv, chamado de produto de λ por v.

que satisfazem a diversos axiomas.

VS1 Associatividade da soma: Para todos os vetores u, v, w de V, vale que

$$u + (v + w) = (u + v) + w.$$

VS2 Comutatividade da soma: Para todos os vetores u, v de V, vale que

$$u + v = v + u.$$

VS3 Existência de vetor nulo: Existe um vetor 0_V tal que

$$v + 0_V = 0_V + v = v$$

para todo $v \in V$; Este vetor é chamado de **zero** ou **vetor nulo**.

VS4 Existência de inverso aditivo: Para todo vetor v, existe um vetor $(-v)$ tal que

$$v + (-v) = (-v) + v = 0_V.$$

O vetor $(-v)$ é chamado de **inverso aditivo** ou **oposto** de v.

VS5 Associatividade da multiplicação: Para todo vetor v de V e todos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale que

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v.$$

VS6 Distributividade à esquerda: Para todos os vetores u, v de V e todo escalar α, vale que

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

VS7 Distributividade à direita: Para todos vetor v de V e todos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale que

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v.$$

VS8 Elemento neutro do produto: Para todo vetor v, vale que

$$1v = v.$$

Seja

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ &= \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

com operações

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Associatividade da soma: Se $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$,

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= \big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) + (z_1, z_2)\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2)\\ &= \big((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2\big)\\ &= \big(x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)\big)\\ &= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2)\\ &= (x_1, x_2) + \big((y_1, y_2) + (z_1, z_2)\big)\\ &= x + (y + z),\end{aligned}$$

o que prova que a soma é associativa.

Comutatividade é similar.

Qual o vetor $o = (o_1, o_2)$ tal que $x + o = o + x = x$ para qualquer vetor $x = (x_1, x_2)$?
Rascunho:

$$x + o = x$$

$$(x_1, x_2) + (o_1, o_2) = (x_1, x_2)$$

$$(x_1 + o_1, x_2 + o_2) = (x_1, x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 & + & o_1 & = & x_1 \\ x_2 & + & o_2 & = & x_2 \end{cases}$$

$$o_1 = o_2 = 0.$$

Este é o melhor **candidato** para o vetor nulo.

Defina $0_{\mathbb{R}^2} = 0_2 = (0,0)$. Então para todo vetor $x = (x_1, x_2)$ temos que

$$\begin{aligned} x + 0_2 &= (x_1, x_2) + (0,0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0) \\ &= (x_1, x_2) \\ &= x. \end{aligned}$$

e similarmente $0_2 + x = x$.

Portanto, 0_2 é de fato o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ (com as operações dadas).

Espaços vetoriais

Exemplos: $\mathbb{R}^2$, quem são os vetores opostos?

Se $x = (x_1, x_2)$ é dado, qual o vetor $-x = (a, b)$ tal que $x + (-x) = 0_2$?

Rascunho:

$$x + (-x) = 0_2$$
$$(x_1, x_2) + (a, b) = (0, 0)$$
$$(x_1 + a, x_2 + b) = (0, 0)$$
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & a & = & 0 \\ x_2 & + & b & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & -x_1 \\ b & = & -x_2 \end{array} \right.$$

$(-x) = (-x_1, -x_2)$ é o melhor **candidato** para o vetor oposto de x.

Dado $x = (x_1, x_2)$, **defina** $-x = (-x_1, -x_2)$. Temos que

$$\begin{aligned} x + (-x) &= (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2) \\ &= (0, 0) \\ &= 0_2, \end{aligned}$$

e similarmente $(-x) + x = 0_2$.

Portanto, $-x = (-x_1, -x_2)$ é de fato o vetor oposto de $x = (x_1, x_2)$.

Seja

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \qquad (n \text{ vezes}) \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

com operações

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

e

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Este é chamado de **espaço euclidiano *n*-dimensional**.

- $0_n = 0_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0)$.
- $-(x_1, \ldots, x_n = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Casos particulares

Normalmente chamam-se

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ de **reta real**.
- $\mathbb{R}^2$ de **plano**.
- $\mathbb{R}^3$ de **espaço**.

Espaços vetoriais

Exemplos: $M_{m\times n}$

Seja $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$ com as operações: Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

então

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

e se $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Éstas operações determinam o **espaço vetorial das matrizes de ordem** $m \times n$.

Notações alternativas

- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m\times n} = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
- Para espaços de matrizes quadradas, $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Se X é um conjunto então $\mathbb{R}^X$ é o conjunto das funções $X \to \mathbb{R}$.

Se $f, g \in \mathbb{R}^X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $(f+g), (\lambda f)\colon X \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Se $f \in \mathbb{R}^X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, como mostrar que $(\alpha + \beta)f = (\alpha f) + (\beta f)$?

São funções de X a $\mathbb{R}$! Tem-se que mostrar que os valores são iguais.
Para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\big((\alpha + \beta)f\big)(x) &= (\alpha + \beta)f(x) && \text{(definição de função soma)} \\
&= (\alpha f(x)) + (\beta f(x)) && \text{(distributividade em } \mathbb{R}\text{)} \\
&= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) && \text{(definição de função produto)} \\
&= \big((\alpha f) + (\beta f)\big)(x) && \text{(definição de soma de funções)}
\end{aligned}$$

Portanto, $(\alpha + \beta)f = (\alpha f) + (\beta f)$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathbb{R}^X$.

Se "x" é uma variável, seja $\mathbb{R}[x]$ o espaço dos polinômios reais:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

($a_0, a_1 \ldots, a_n$ **coeficientes** reais) com as operações usuais: Se

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ q(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots\cdots\cdots + b_m x^m \end{aligned}$$

- $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots$
- $\lambda p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \cdots$

Sejam $V_1, \dots, V_n$ espaços vetoriais.
O **produto direto** de $V_1, \dots, V_n$ é o produto cartesiano

$$\prod_{i=1}^{n} V_i = V_1 \times \cdots \times V_n$$

com operações "entrada-a-entrada":

$$(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$
$$\lambda(v_1, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)$$

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^{m+n} \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$
  $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \cong ((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n))$

Seja $V = \mathbb{R}$ com a "soma"

$$x \oplus y = x + y + 1.$$

e o produto por escalar

$$\lambda \odot y = \lambda x + \lambda - 1$$

Exercício

V é um espaço vetorial com as operações $\oplus$ e $\odot$.

Quem é o vetor nulo?

Queremos 0_V tal que $x \oplus 0_V = x$ para todo x:

$$\begin{aligned} x \oplus 0_V &= x \\ x + 0_V + 1 &= x \\ 0_V &= -1 \end{aligned}$$

Parte do Exercício anterior: Verifique que $0_V = -1$ é, de fato, um vetor nulo para V.

Seja $V = \mathbb{R}$ com a soma $x \oplus y = y$ e o produto $\lambda \odot x = 0$
A distributividade vale:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot x &= 0 \\ &= 0 \oplus 0 \\ &= (\alpha x) \oplus (\beta x).\end{aligned}$$

Mas a comutatividade não:

$$x \oplus y = y$$
$$y \oplus x = x.$$

É preciso achar um contra-exemplo explícito!

Tome $x = 0$ e $y = 1$ em V. Então

$$0 \oplus 1 = 1, \qquad \text{mas} \qquad 1 \oplus 0 = 0,$$

logo $0 \oplus 1 \neq 1 \oplus 0$.

VS4 Para todo vetor v, existe $-v$ tal que $v + (-v) = 0_V$.

Mas então $(-v)$ depende de 0_V!

Teorema

O vetor nulo de um espaço vetorial V é único.

Se o e o' são vetores nulos, então

$$\begin{aligned} o &= o + o' && \text{(pois } o' \text{ é nulo)} \\ &= o'. && \text{(pois } o \text{ é nulo)} \end{aligned}$$

Teorema

Dado um vetor v de um espaço vetorial V, o inverso aditivo de v é único.

Se w e w' são inversos aditivos de v, então

$$\begin{aligned}
w &= w + 0_V && \text{(vetor nulo)}\\
&= w + (v + w') && \text{(w' é inverso aditivo de v)}\\
&= (w + v) + w' && \text{(associatividade da soma)}\\
&= 0_V + w' && \text{(w é inverso aditivo de v)}\\
&= w'. && \text{(vetor nulo)}
\end{aligned}$$

Teorema (Regras de Sinal)

Seja V um espaço vetorial. Então as seguintes igualdades são válidas para quaisquer escalares α e β e quaisquer vetores v e w:

1. $\alpha 0_V = 0_V$.
2. $0v = 0_V$.
3. $-(-v) = v$.
4. $\alpha(-v) = (-\alpha)v = -(\alpha v)$.
5. $\alpha(v - w) = (\alpha v) - (\alpha w)$.
6. $(\alpha - \beta)v = (\alpha v) - (\beta v)$.

Por exemplo, para provar que $\alpha 0_V = 0_V$. Seja $v = \alpha 0_V$. Então

$$\begin{aligned} v &= \alpha 0_V \\ &= \alpha(0_V + 0_V) && \text{(vetor nulo)} \\ &= \alpha 0_V + \alpha 0_V && \text{(distributividade)} \\ &= v + v \end{aligned}$$

$$v = v + v.$$

Some $-v$ em ambos os lados da equação:

$$\begin{aligned} v + (-v) &= v + v + (-v) && \\ 0_V &= v + 0_V && \text{(inverso aditivo)} \\ 0_V &= v && \text{(vetor nulo)} \\ 0_V &= \alpha 0_V, && \end{aligned}$$

como queríamos.

Se $v, w, \ldots$ são vetores e $\alpha \neq 0$ é um escalar, então

$$v - w := v + (-w)$$
$$\frac{v}{\alpha} := \frac{1}{\alpha} v.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= ((v_1 + v_2) + (v_3 + v_4)) \\ &= v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4) \\ &= \cdots . \end{aligned}$$

Teorema (Leis do cancelamento)

Em um espaço vetorial,

1. *Se* $v + x = w + x$ *então* $v = w$.
2. *Se* $\lambda \neq 0$ *e* $\lambda v = \lambda w$ *então* $v = w$.
3. *Se* $v \neq 0_V$ *e* $\lambda v = \mu v$ *então* $\lambda = \mu$.

Os itens 1 e 2 são exercícios. A prova do item 3 é feita por "redução ao absurdo".

Se $v \neq 0_V$ e $\lambda v = \mu v$ então $\lambda = \mu$.

Suponha que $v \neq 0_V$ e $\lambda v = \mu v$, mas que $\lambda \neq \mu$. Então

$$
\begin{aligned}
\lambda v &= \mu v \\
\lambda v - \mu v &= 0_V && \text{(subtraia } \mu v\text{)} \\
(\lambda - \mu) v &= 0_V && \text{(distributividade; regras de sinal)} \\
v &= \left(\frac{1}{\lambda - \mu}\right) 0_V && \text{(multiplique por } (\lambda - \mu)^{-1}\text{)} \\
v &= 0_V, && \text{(unidade do produto; regras de sinal)}
\end{aligned}
$$

uma contradição.

Portanto, se $v \neq 0_V$ e $\lambda v = \mu v$, então $\lambda = \mu$.