Representação de Riesz e adjuntas

Álgebra Linear – Videoaula 20

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Representações de funcionais lineares e produto interno

Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Então f é representado por uma matriz de ordem $1 \times n$ nas bases canônicas:

$$\overline{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

tal que, para todo $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \overline{a} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \\ &= \langle \overline{a}, \mathrm{x} \rangle \end{aligned}$$

Será que o mesmo vale para qualquer EPI de dimensão finita?

Espaço dal

Definição

O espaço vetorial
$$V^* = \mathrm{L}(V, \mathbb{R})$$
dos **funcionais** lineares sobre V é chamado de **dual** de V.

Notação alternativa

$V' = V^*$

Teorema de Riesz

Teorema (Teorema da representação de Riesz)

Seja V um EPI de dimensão finita.
A função

$$\tau : V \to V^*, \qquad \tau(v) = \langle \cdot, v \rangle$$

i.e., $\tau(v)(x) = \langle x, v \rangle$, *é um isomorfismo linear.*

Em particular, para cada $f \in V^*$ existe um único vetor $v \in V$ tal que

$$f(x) = \langle x, v \rangle \text{ para todo } x \in V.$$

Se $f = \langle \cdot, v \rangle$, então v chama-se de **vetor de Riesz** de f.

É comum se denotar $\tau(v)|_x = \tau(v)(x)$.

Teorema de Riesz

$$\tau\colon V \to V^*, \qquad \tau(v) = \langle \cdot, v \rangle$$

τ é linear: Se $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então para todo $x \in V$ vale que

$$\begin{aligned} \tau(v + \lambda w)|_x &= \langle x, v + \lambda w \rangle \\ &= \langle x, v \rangle + \lambda \langle x, w \rangle \\ &= \tau(v)|_x + \lambda \tau(w)|_x \\ &= (\tau(v) + \lambda \tau(w))|_x \end{aligned}$$

ou seja, $\tau(v + \lambda w) = \tau(v) + \lambda \tau(w)$.

Teorema de Riesz

$$\tau\colon V \to V^*, \qquad \tau(v) = \langle \cdot, v \rangle$$

<u>τ é injetiva</u>: Se $v \in \ker(\tau)$, então para todo x,

$$0 = \tau(v)|_x = \langle x, v \rangle$$

o que implica que $v = 0_V$.

Teorema de Riesz

$$\tau \colon V \to V^*, \qquad \tau(v) = \langle \cdot, v \rangle$$

τ é sobrejetiva: Seja $f \in V^*$.

- Se $f = 0$, então $f = \tau(0_V)$.
- Se $f \neq 0$, então $\ker(f) \neq V$, logo $\ker(f)^\perp \neq V^\perp$, ou seja, $\ker(f)^\perp \neq \{0_V\}$.

- $\ker(f)^\perp \neq \{0_V\}$.

Tome $w \in \ker(f)^\perp$ com $w \neq 0_V$.

Em particular, $w \notin \ker(f)$.

Tome $v = \frac{1}{f(w)}w$. Então $v \in \ker(f)^\perp$ e

$$f(v) = f\left(\frac{1}{f(w)}w\right) = \frac{1}{f(w)}f(w) = 1$$

Teorema de Riesz

- No caso em que $f \neq 0$, encontramos $v \in \ker(f)^\perp$ com $f(v) = 1$.

Em particular, $v \neq 0_V$.

Dado $x \in V$, temos que $x - f(x)v \in \ker(f)$, pois

$$f(x - f(x)v) = f(x) - f(x)f(v) = f(x) - f(x) = 0,$$

logo

$$0 = \langle x - f(x)v, v\rangle = \langle x, v\rangle - f(x)\langle v, v\rangle,$$

o que significa que

$$f(x) = \frac{1}{\langle v, v\rangle}\langle x, v\rangle = \left\langle x, \frac{1}{\langle v, v\rangle} v\right\rangle = \tau\left(\frac{1}{\langle v, v\rangle} v\right)\bigg|_x$$

para qualquer $x \in X$, ou seja, $f = \tau\left(\frac{1}{\langle v,v\rangle} v\right)$.

Teorema

Sejam V e W EPIs com dimensões finitas e $T \in \mathrm{L}(V, W)$ uma transformação linear.

Então existe uma única transformação linear $T^* \in \mathrm{L}(W, V)$ tal que

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$$

para todos $v \in V$ e $w \in W$.

Definição

A transformação T^* é chamada de **adjunta** de T.

Unicidade: Se $S \in \mathrm{L}(W, V)$ é outra transformação linear para a qual

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, S(w)\rangle$$

para todos $v \in V$ e $w \in W$, então, para cada $w \in W$,

$$\langle v, S(w)\rangle = \langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle,$$

o que sabemos implicar que $S(w) = T^*(w)$, i.e., $S = T^*$.

Transformações adjuntas

Existência: Dado $w \in W$ fixo, temos o funcional linear em V

$$v \mapsto \langle T(v), w \rangle = \langle \cdot, w \rangle \circ T.$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz, este funcional é dado pelo produto interno por um único vetor de V. Ou seja, existe um único vetor $T^*(w) \in V$ tal que

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$$

para todo $v \in V$.

Transformações adjuntas

A transformação $T^*\colon W \to V$ está bem-definida: $T^*(w)$ é o vetor de Riesz de $v \mapsto \langle T(v), w\rangle$.

Falta mostrar que T^* é linear.

Dados $w_1, w_2 \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que verificar que $T^*(w_1) + \lambda T^*(w_2)$ satisfaz à propriedade que define $T^*(w_1 + \lambda w_2)$. Para todo $v \in V$,

$$\begin{aligned}
\langle v, T^*(w_1) + \lambda T^*(w_2)\rangle &= \langle v, T^*(w_1)\rangle + \lambda\langle v, T^*(w_2)\rangle \\
&= \langle T(v), w_1\rangle + \lambda\langle T(v), w_2\rangle \\
&= \langle T(v), w_1 + \lambda w_2\rangle,
\end{aligned}$$

o que significa que $T^*(w_1 + \lambda w_2) = T^*(w_1) + \lambda T^*(w_2)$.

Teorema

Se $S, T \in \mathrm{L}(V, W)$ *e* $Q \in \mathrm{L}(W, Z)$ *são transformações lineares entre EPIs e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, então*

1. $(S + \lambda T)^* = S^* + \lambda T^*$
2. $(T^*)^* = T$
3. $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$.
4. $(QT)^* = Q^* T^*$
5. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, *se* T *é inversível.*

Teorema

Para transformações S, T entre EPIs,

1. $(S + \lambda T)^* = S^* + \lambda T^*$
2. $(T^*)^* = T$
3. $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}.$
4. $(ST)^* = T^* S^*$
5. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

no sentido de que um lado da equação está definido se, e somente se, o outro lado está definido, em cujo caso ambos os lados coincidem.

Propriedades de adjuntas

Versão legível

Se ST está definida, então para quaisquer v, w,

$$\begin{aligned} \langle (ST)v, w\rangle &= \langle S(T(v)), w\rangle \\ &= \langle T(v), S^*(w)\rangle \\ &= \langle v, T^*(S^*(w))\rangle \\ &= \langle v, (T^*S^*)(w)\rangle \end{aligned}$$

portanto $(ST)^* = T^*S^*$.

Os outros são similares.

Exemplo de adjunta

Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x, x + y).$$

Vamos calcular $T^*\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Queremos que para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$ valha que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle.$$

Vamos tentar calcular T^* somente na base canônica $\mathcal{E}_2 = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo de adjunta

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x,y) = (x, x+y).$$

Restringimos a equação da adjunta para vetores da base canônica:

$$\begin{aligned}
\langle T^*(e_1), e_1\rangle &= \langle e_1, T(e_1)\rangle \\
&= \langle (1,0), T(1,0)\rangle \\
&= \langle (1,0), (1,1)\rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exemplo de adjunta

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x,y) = (x, x+y).$$

- $\langle T^*(e_1), e_1\rangle = 1$
- Similarmente, $\langle T^*(e_1), e_2\rangle = 1$
- Portanto,

$$T^*(e_1) = \langle T^*(e_1), e_1\rangle e_1 + \langle T^*(e_1), e_2\rangle e_2 = e_1 + e_2 = (1,1)$$

- Ou seja, $T^*(1,0) = (1,1)$.

Exemplo de adjunta

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x,y) = (x, x+y).$$

- $T^*(1,0) = (1,1)$
- Similarmente, $T^*(0,1) = (1,0)$
- Em geral,

$$T^*(x,y) = xT^*(1,0) + yT^*(0,1) = (x+y, x)$$

Matrizes de adjuntas

$$T, T^*\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\;\; T(x,y) = (x, x+y),\;\; T^*(x,y) = (x+y, x)$$

Note que

$$\left[T\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\left[T^*\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[T\right]^t$$

(onde "A^t" é a transposta de A).

Matrizes com respeito a bases ortonormais

Teorema

Sejam

- V *um EPI com uma base ordenada* $\mathcal{B} = \{(u_1, \ldots, u_n)\}$
- W *um EPI com uma base* ***ortonormal*** *ordenada* $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$.
- $T \in \mathrm{L}(V, W)$

Então a entrada (i, j) *de* $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *é* $\langle T(u_j), w_i \rangle$ *, ou seja,*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \langle T(u_1), w_1 \rangle & \langle T(u_2), w_1 \rangle & \cdots & \langle T(u_n), w_1 \rangle \\ \langle T(u_1), w_2 \rangle & \langle T(u_2), w_2 \rangle & \cdots & \langle T(u_n), w_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T(u_1), w_m \rangle & \langle T(u_2), w_m \rangle & \cdots & \langle T(u_n), w_m \rangle \end{bmatrix}$$

Matrizes com respeito a bases ortonormais

Pelo Teorema de coordenadas em bases ortonormais, a j-ésima coluna de $\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é

$$\left[T(u_j)\right]^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \langle T(u,j), w_1 \rangle \\ \langle T(u_j), w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle T(u_j), w_m \rangle \end{bmatrix},$$

cuja i-ésima entrada é $\langle T(u_j), w_i \rangle$.

Matrizes de adjuntas

Corolário

Sejam

- V *um EPI com uma base* ***ortonormal*** *ordenada* $\mathcal{B} = \{(u_1, \ldots, u_n)\}$
- W *um EPI com uma base* ***ortonormal*** *ordenada* $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$.
- $T \in \mathrm{L}(V, W)$.

Então

$$\left[T^*\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left(\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^t$$

A entrada (i, j) de $\left[T^*\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ é

$$\langle T^*(w_j), u_i\rangle = \langle w_j, T(u_i)\rangle = \langle T(u_i), w_j\rangle,$$

que é a entrada (j, i) de $\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Portanto, essas matrizes são transpostas uma da outra.

Transpostas sem PI?

Se considerarmos bases não-ortonormais, podem existir diferentes transformações S, Q que são representadas pela transposta da matriz de T em diferentes bases.

Por exemplo, se considerarmos as transformações $T, S \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$T(x,y) = (-x+3y, 2y) \qquad \text{e} \qquad S(x,y) = (-x, 3x+2y)$$

e a base canônica $\mathcal{E}_2 = \{(1,0),(0,1)\}$, então

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [S] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = [T]^t$$

Transpostas sem PI?

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [S] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = [T]^t$$

mas se considerarmos a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$,

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^t \qquad \text{enquanto} \qquad [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Endomorfismos lineares

Definição

Se V é um espaço vetorial, denotamos $\mathrm{L}(V) = \mathrm{L}(V, V)$.

Uma transformação linear $T \in \mathrm{L}(V)$ é chamada de um **operador linear** ou um **endomorfismo linear**.

Subespaços invariantes e compressões

Definição

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$ linear. Dizemos que um subespaço $W \subseteq V$ é **invariante por** T ou T**-invariante** se $T(W) \subseteq W$.

Por exemplo, o subespaço $W = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ é invariante pela transformação $T(x, y) = (x, x + y)$. De fato,

$$T(0, y) = (0, y)$$

Definição

Se $W \subseteq V$ é T-invariante, a **compressão** de T a W é

$$T_W \in \mathrm{L}(W), \qquad T_W(u) = T(u).$$

“Compressão” é essencialmente o mesmo que “restrição”, mas também diminuímos o contra-domínio.

Adjuntas de compressões

Considerando novamente $\mathbb{R}^2$ com o PI usual, o subespaço

$$W = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

e a transformação

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x, y) = (x, x + y),$$

Qual é a adjunta de $T_W : W \to W$?

Será que é $(T^*)_W$? Lembre-se que $T^*(x, y) = (x + y, x)$. Temos que

$$T^*(0, y) = (y, 0)$$

W não é nem T^*-invariante. Não faz sentido nem escrever "$(T^*)_W$"!

Adjuntas de compressões

Teorema

Sejam V um EPI de dimensão finita, $T \in \mathrm{L}(V)$ e $W \subseteq V$ um subespaço invariante.
Então $(T_W)^* = (\mathrm{proj}_W\, T^*)_W$

Note que

$$(\mathrm{proj}_W\, T^*)(W) \subseteq \mathrm{proj}_W(V) \subseteq W,$$

e a compressão $(\mathrm{proj}_W\, T^*)_W$ faz sentido.

Adjuntas de compressões

Teorema

Sejam V um EPI de dimensão finita, $T \in \mathrm{L}(V)$ e $W \subseteq V$ um subespaço invariante.
Então $(T_W)^* = (\mathrm{proj}_W\, T^*)_W$

Para todos $u, w \in W$,

$$\begin{aligned}\langle T_W(u), w\rangle &= \langle T(u), w\rangle \\ &= \langle u, T^*(w)\rangle \\ &= \langle u, \mathrm{proj}_W(T^*(w))\rangle \\ &= \langle u, (\mathrm{proj}_W\, T^*)_W\,(w)\rangle\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é uma propriedade que conhecemos de projeção ortogonal.

Isso determina que $(\mathrm{proj}_W\, T^*)_W$ satisfaz à propriedade da adjunta de T_W.

Teorema

Sejam V um EPI de dimensão finita, $T \in \mathrm{L}(V)$ e $W \subseteq V$ um subespaço.

1. *W é T-invariante se, e somente se, $W^{\perp}$ é T^*-invariante.*
2. *Se W é tanto T-invariante quanto T^*-invariante, então*

$$(T_W)^* = T^*_W$$

Suponha que W é T-invariante. Então para todo $z \in W^{\perp}$ e todo $w \in W$,

$$0 = \langle T(w), z\rangle = \langle w, T^*(z)\rangle,$$

ou seja, $T^*(z) \in W^{\perp}$, qualquer que seja $z \in W^{\perp}$. Ou seja, $W^{\perp}$ é T^*-invariante.

Subespaços invariantes e adjuntas

Mostramos que se W é T-invariante, então $W^\perp$ é T^*-invariante, quaisquer quem sejam W e T.

Em particular, o mesmo fato se aplica com T^* no lugar de T e $W^\perp$ no lugar de W: Se $W^\perp$ é T^*-invariante, então $(W^\perp)^\perp = W$ é $(T^*)^* = T$-invariante.

Item (2) é exercício/trivial a partir do teorema anterior.

Teorema

Sejam V, W EPIs de dimensão finita e $T \in \mathrm{L}(V, W)$.

1. $\ker(T^*) = \mathrm{im}(T)^\perp$ e $\mathrm{im}(T^*) = \ker(T)^\perp$
2. $$\begin{aligned} T \text{ é injetiva} &\iff T^* \text{ é sobrejetiva} \\ T \text{ é sobrejetiva} &\iff T^* \text{ é injetiva} \\ T \text{ é bijetiva} &\iff T^* \text{ é bijetiva.} \end{aligned}$$
3. $\ker(T^*T) = \ker(T)$ e $\ker(TT^*) = \ker(T^*)$.
4. $\mathrm{im}(T^*T) = \mathrm{im}(T^*)$ e $\mathrm{im}(TT^*) = \mathrm{im}(T)$.

Temos que

$$\begin{aligned} w \in \ker(T^*) &\iff T^*(w) = 0_V \\ &\iff \langle T^*(w), v\rangle = 0 \text{ para todo } v \in V \\ &\iff \langle w, T(v)\rangle = 0 \text{ para todo } v \in V \\ &\iff w \in \operatorname{im}(T)^\perp \end{aligned}$$

Portanto $\ker(T^*) = \operatorname{im}(T)^\perp$.

Para a outra igualdade, troque T por T^* e tome "perps" (subespaços ortogonais).

Kernel, imagem e adjuntas

2.
$$\begin{aligned} T \text{ é injetiva} &\iff T^* \text{ é sobrejetiva} \\ T \text{ é sobrejetiva} &\iff T^* \text{ é injetiva} \\ T \text{ é bijetiva} &\iff T^* \text{ é bijetiva} \end{aligned}$$

Pelo item (1),

$$\begin{aligned} T \text{ é injetiva} &\iff \ker(T) = \{0_V\} \\ &\iff \ker(T)^\perp = \{0_V\}^\perp = V \\ &\iff \operatorname{im}(T^*) = V \\ &\iff T^* \text{ é sobrejetiva} \end{aligned}$$

Claramente, $\ker(T) \subseteq \ker(T^*T)$.

Reciprocamente, se $T^*T(v) = 0_V$, então

$$0 = \langle T^*T(v), v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle,$$

logo $T(v) = 0_V$.

Portanto, $\ker(T) = \ker(T^*T)$.

A outra igualdade é obtida trocando T por T^*.

Segue do item (3) tomando perps e aplicando o item (1):

$$\begin{aligned} \ker(T^*T) &= \ker(T) \\ \ker(T^*T)^\perp &= \ker(T)^\perp \\ \mathrm{im}((T^*T)^*) &= \mathrm{im}(T^*) \\ \mathrm{im}(T^*T) &= \mathrm{im}(T^*) \end{aligned}$$

e similarmente para a outra igualdade.