Diagonalizabilidade, autovalores e autovetores

Álgebra Linear – Videoaula 22

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Exemplo: potências de matrizes

Problema

Considere a matriz $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Quanto é X^{365}? (Este tipo de problema é relacionado às "*Cadeias de Markov*".)

- $X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
- $X^2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$
- $X^3 = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 25 & 26 \\ 39 & 38 \end{bmatrix}$.

Não há nenhum padrão óbvio.

Exemplo: potências de matrizes

Mas e se eu contasse que $X = PDP^{-1}$, onde

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}?$$

Então

- $X = PDP^{-1}$
- $X^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PDDP^{-1} = P(D^2)P^{-1}$
- $X^3 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = P(D^3)P^{-1}$

  $\vdots$
- $X^n = P(D^n)P^{-1}$

Exemplo: potências de matrizes

Como D é diagonal, é fácil calcular suas potências.

- $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$
- $D^2 = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \end{bmatrix}$

  $\vdots$
- $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$

Exemplo: potências de matrizes

Voltando ao problema inicial:

$$X = PDP^{-1}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
X^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{4})^n \end{bmatrix} \left(\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 2 - 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ 3 - 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 3 + 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{5(-4)^n} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Exemplo: potências de matrizes

$$X^n = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{5(-4)^n}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Em particular, para n grande (e.g. $n = 365$),

$$X^{365} \approx \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Mas de onde saíram D e P?

Matrizes similares e representações de endomorfismos

Definição

Duas matrizes quadradas $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ são **similares** se existe uma matriz inversível G tal que $M = GNG^{-1}$.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, $\mathcal{A}$ uma base ordenada de V e $T \in \mathrm{L}(V)$.

1. *Se $\mathcal{B}$ é outra base ordenada de V, então $\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ é similar a $\left[T\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.*
2. *Por outro lado, qualquer matriz similar a $\left[T\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ é da forma $\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ para alguma base ordenada $\mathcal{B}$ de V.*

Matrizes similares e representações de endomorfismos

De fato, as matrizes inversíveis G são exatamente as matrizes de mudança de base de $\mathcal{A}$ para alguma base $\mathcal{B}$:

$$G = \left[\mathrm{id}\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Neste caso,

$$G^{-1} = \left[\mathrm{id}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G \left[T\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} G^{-1} &= \left[\mathrm{id}\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left[T\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \left[\mathrm{id}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \\ &= \left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Matrizes diagonalizáveis

Definição

Uma matriz X é **diagonalizável** se for similar a uma matriz diagonal.

Definição

Um endomorfismo $T \in \mathrm{L}(V)$ em um espaço vetorial de dimensão finita é **diagonalizável** se existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ é diagonal.

Suponha $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ e

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Isso significa que $T(b_i) = \lambda_i b_i$ para todo i.

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + *\lambda^{n-1} + \cdots$$

Endomorfisms diagonalizáveis

Definição

Sejam V um espaço vetorial e $T \in \mathrm{L}(V)$.

- Um escalar λ é um **autovalor** de T se existe um vetor não-nulo $v \in V$ tal que
$$T(v) = \lambda v.$$
Chamamos tal v de **autovetor** associado a λ.
- Se v é um autovetor associado a um autovalor λ, chamamos (λ, v) de um **autopar** de T.
- Se λ é um autovalor de T, o conjunto de todos os autovetores associados a λ, junto com o vetor 0_V, é chamado de **autoespaço** de λ, denotado $\mathscr{E}_\lambda$.
- O **espectro** de T é o conjunto de todos os autovalores de T, e o denotamos por $\mathrm{spec}(T)$.

Uma definição análoga se aplica a matrizes quadradas.

Autoespaços

Se $\lambda \in \operatorname{spec}(T)$, então o autoespaço associado tem todos os vetores-solução de

$$T(v) = \lambda v$$

ou seja,

$$(\lambda\,\mathrm{id} - T)(v) = 0_V.$$

Em outras palavras, o autoespaço associado a λ é $\mathscr{E}_\lambda = \ker(\lambda\,\mathrm{id} - T)$.

Similarmente para matrizes, o autoespaço associado a um autovalor λ de uma matriz quadrada A é $\mathscr{E}_\lambda = \operatorname{nul}(\lambda I - A)$, onde "$I$" é a matriz identidade de ordem apropriada.

Observação

É comum escrever "λ" ao invés de "$\lambda\,\mathrm{id}$" ou "λI".

Como achar autovalores?

Para encontrar autovalores de uma matriz A, precisamos encontrar números λ para os quais:

- $\mathrm{nul}(\lambda I - A)$ é não-trivial.
- Ou seja, $\lambda I - A$ não é inversível.
- Ou seja, $\det(\lambda I - A) = 0$.

O último item é uma equação numérica em λ, que pode ser resolvida!

Fato

Se $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, então a expressão "$\det(\lambda I - A)$" é polinomial de grau n em λ: $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + *\lambda^{n-1} + \cdots$.

Mas e para transformações lineares?

Determinante de transformações lineares

Teorema

1. *Se A e B são matrizes similares, então* $\det(A) = \det(B)$.
2. *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathrm{L}(V)$ e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são bases ordenadas de V, então* $\det\left[T\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \det\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

1. Se $A = GBG^{-1}$, então

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(GBG^{-1}) \\ &= \det(G)\det(B)\det(G)^{-1} \\ &= \det(B)\end{aligned}$$

2. $\left[T\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ e $\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ são similares, logo têm o mesmo determinante.

Determinante de transformações lineares

Definição

Se $T \in \mathrm{L}(V)$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, o **determinante** de T é

$$\det(T) = \det \left[T \right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}},$$

onde $\mathcal{A}$ é qualquer base ordenada de V.

Por exemplo, a transformação

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x,y) = (x+y, x)$$

é representada pela matriz

$$\left[T \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo $\det(T) = 1$.

Definição

O **polinômio característico** de T é o polinômio

$$p_T(x) = \det(x\,\mathrm{id} - T)$$

Por exemplo, se

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x,y) = (x+y, x)$$

então

$$\begin{aligned} p_T(x) &= \det(x\,\mathrm{id} - T) \\ &= \det(xI - [T]) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det \begin{bmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{bmatrix} = (x-1)^2 \end{aligned}$$

Teorema

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Então os autovalores de T são exatamente as raízes do polinômio característico $p_T(x)$.

Essa é a própria motivação:

$$\begin{aligned}
\lambda \in \operatorname{spec}(T) &\iff T(v) = \lambda v \text{ para algum } v \neq 0_V \\
&\iff (\lambda \operatorname{id} - T)(v) = 0_V \text{ para algum } v \neq 0_V \\
&\iff \ker(\lambda \operatorname{id} - T) \neq \{0_V\} \\
&\iff \lambda \operatorname{id} - T \text{ não é injetiva/inversível} \\
&\iff \det(\lambda \operatorname{id} - T) = 0 \\
&\iff p_T(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

Teorema

Suponha que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são autovalores distintos de $T \in \mathrm{L}(V)$.

1. *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. Isto é, se $T(v_i) = \lambda_i v_i$, $v_i \neq 0_V$, então $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é LI.*
2. *Os autoespaços $\mathscr{E}_{\lambda_1}, \ldots, \mathscr{E}_{\lambda_k}$ são independentes.*

Dados $v_1, \ldots, v_k$ como no enunciado, se $v_1, \ldots, v_k$ fossem LD, tome o menor r para o qual $\{v_1, \ldots, v_r\}$ é LD. Então temos uma combinação linear da forma

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0_V \tag{1}$$

onde nem todos os α_i são nulos. Aplicando T:

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_r T(v_r) = 0_V$$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0_V \tag{2}$$

Autovetores

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r = 0_V \tag{1}$$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0_V \tag{2}$$

Multiplicando (1) por λ_r e subtraindo de (2), obtemos

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_r)v_2 + \cdots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} = 0_V$$

Como r foi tomado mínimo, $\{v_1, \ldots, v_{r-1}\}$ é LI, logo

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_r) = 0$$

para cada $i < r$. Como $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r$ são distintos, $\alpha_i = 0$ para $i < r$.

(1) se transforma em

$$\alpha_r v_r = 0_V$$

logo $\alpha_r = 0$, contradizendo a escolha inicial dos α_i (não todos nulos).

Diagonalizabilidade e autocoisas

Teorema

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$, *com autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
São equivalentes:

1. T *é diagonalizável.*
2. V *possui uma base consistindo de autovetores de* T.
3. $V = \mathscr{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}_{\lambda_k}$.
4. $\dim(V) = \dim(\mathscr{E}_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(\mathscr{E}_{\lambda_k})$.

1 $\Rightarrow$ 2:

Se $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ é tal que

$$\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

então $T(b_i) = \lambda_i b_i$, ou seja, b_i são autovetores.

Teorema

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$, com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
São equivalentes:

1. *T é diagonalizável.*
2. *V possui uma base consistindo de autovetores de T.*
3. $V = \mathscr{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}_{\lambda_k}$.
4. $\dim(V) = \dim(\mathscr{E}_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(\mathscr{E}_{\lambda_k})$.

2 $\Rightarrow$ 1:
Se $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ é tal que $T(b_i) = \lambda_i b_i$, então

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizabilidade e autocoisas

Teorema

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$, *com autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
São equivalentes:

1. T *é diagonalizável.*
2. V *possui uma base consistindo de autovetores de* T.
3. $V = \mathscr{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}_{\lambda_k}$.
4. $\dim(V) = \dim(\mathscr{E}_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(\mathscr{E}_{\lambda_k})$.

2⇒3:

Assumindo 2, segue que $V = \mathscr{E}_{\lambda_1} + \cdots + \mathscr{E}_{\lambda_k}$, e já sabemos que os autoespaços são independentes.

Teorema

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$, com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
São equivalentes:

1. *T é diagonalizável.*
2. *V possui uma base consistindo de autovetores de T.*
3. $V = \mathscr{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}_{\lambda_k}$.
4. $\dim(V) = \dim(\mathscr{E}_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(\mathscr{E}_{\lambda_k})$.

3 $\Rightarrow$ 2:
Assumindo 3, $\mathscr{E}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathscr{E}_{\lambda_k}$ é gerador, e basta tomar uma base dentro deste conjunto.

Teorema

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$*, com autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$*.*
São equivalentes:

1. T *é diagonalizável.*
2. V *possui uma base consistindo de autovetores de* T*.*
3. $V = \mathscr{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}_{\lambda_k}$.
4. $\dim(V) = \dim(\mathscr{E}_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(\mathscr{E}_{\lambda_k})$.

3 $\Rightarrow$ 4: trivial.

4 $\Rightarrow$ 3: novamente pois $\mathscr{E}_{\lambda_1}, \ldots, \mathscr{E}_{\lambda_k}$ são independentes.

Multiplicidades

Lembre-se que a **multiplicidade** de uma raiz λ de um polinômio é o maior número natural α para o qual

$$p(x) = (x - \lambda)^\alpha q(x).$$

Equivalentemente, α é o número de vezes que o termo "$(x - \lambda)$" aparece quando fatora-se $p(x)$ completamente.

Definição

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$, com autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

1. A **multiplicidade algébrica** do autovalor λ_i é a sua multiplicidade como raiz do polinômio característico $p_T(x)$.
2. A **multiplicidade geométrica** do autovalor λ_i é $\dim(\mathscr{E}_{\lambda_i})$.

Teorema

A multiplicidade geométrica de um autovalor λ de $T \in \mathrm{L}(V)$ é menor ou igual à sua multiplicidade algébrica.

Sejam $v_1, \ldots, v_r$ vetores de uma base de $\mathscr{E}_\lambda$. Então r é a multiplicidade geométrica de $\mathscr{E}_\lambda$.
Estenda essa coleção para uma base ordenada $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_n)$ de V. A matriz de T nesta base é da forma

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & & & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \lambda & * & \cdots & * \\ & & & * & \cdots & * \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & * & \cdots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I_r & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_T(x) &= \det(xI - [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} xI_r & \\ & xI_{n-r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda I_r & A \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} (x-\lambda)I_r & -A \\ 0 & xI_{n-r} - B \end{bmatrix} \\ &= (x-\lambda)^r \det(xI_{n-r} - B) \end{aligned}$$

Como a multiplicidade algébrica de λ é o expoente α que aparece na fatoração completa de $p_T(x) = (x-\lambda)^\alpha \cdots$, então $r \leq \alpha$.

Diagonalizabilidade e multiplicidades

Lembre-se que um polinômio $p(x)$ é **completamente fatorado** se $p(x) = C(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, onde $n = \partial p(x)$ é o **grau** de $p(x)$.

Teorema

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$, onde $\dim(V) = n < \infty$. São equivalentes:

1. *T é diagonalizável.*
2. *O polinômio característico $p_T(x)$ pode ser fatorado completamente, como produto de fatores lineares, e a multiplicidade geométria de todos os seus autovalores coincide com a multiplicidade algébrica.*

Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são os autovalores de T, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são suas multiplicidades algébricas e $r_1, \ldots, r_k$ suas multiplicidades geométricas, então

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(\mathscr{E}_i) = \sum_{i=1}^{k} r_i \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq \partial p_T(x) = n = \dim(V).$$

Diagonalizabilidade e multiplicidades

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(\mathscr{E}_i) = \sum_{i=1}^{k} r_i \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq \partial p_T(x) = n = \dim(V).$$

Sabemos que T é diagonalizável se, e somente se, o primeiro e o último termos acima são iguais, o que é válido se, e somente se, as desigualdades no meio são igualdades. Isto corresponde exatamente às afirmações do item 2.

Diagonalizabilidade e multiplicidades

Corolário

Se $\dim(V) = n$ e $T \in \mathrm{L}(V)$ possui n autovalores distintos, então T é diagonalizável.

De fato, neste caso a multiplicidade algébrica de cada autovalor é 1, e a multiplicidade geométrica é ≥ 1, logo elas devem coincidir.

Algoritmo de diagonalização para transformaçõs lineares

Se quisermos diagonalizar uma transformação $T \in \mathrm{L}(V)$:

1. Calculamos o polinômio característico:
$$p_T(x) = \det(x\,\mathrm{id} - T).$$
2. Fatoramos $p_T(x)$ completamente, como produto de fatores lineares.
3. Identificamos as raízes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $p_T(x)$, que são os autovalores de T.
4. Determinamos a multiplicidade geométrica (dimensão dos autoespaços) de cada autovalor, e verificamos se coincidem com a multiplicidade algébrica.
5. Encontramos bases $\mathcal{B}_i$ para os autoespaço $\mathscr{E}_{\lambda_i} = \ker(\lambda_i\,\mathrm{id} - T)$
6. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ será uma base de V, cujos elementos são todos autovetores de T
7. $\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ é diagonal (com seus autovalores como entradas diagonais).

Algoritmo de diagonalização para matrizes

Se quisermos diagonalizar uma matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, pensamos em A como uma transformação linear representada na base canônica de $\mathbb{R}^n$ e aplicamos o mesmo processo:

1–6. Faça o mesmo processo que para transformações lineares: calcule o polinômio característico de A, encontre suas raízes, encontre bases para os autoespaços e junte-as para encontrar uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ consistindo de autovetores de A.

7. Ponha todos os elementos da base $\mathcal{B}$ nas colunas de uma matriz B. Então B é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base canônica. Daí

$$[A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{B}} A \, [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n} = B^{-1} A B$$

é diagonal, com a i-ésima entrada diagonal o autovalor associado à i-ésima coluna de B.

Se

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

é triangular superior, então

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \det \begin{bmatrix} x - a_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & x - a_n \end{bmatrix} = (x - a_1) \cdots (x - a_n),$$

logo os autovalores de A são suas entradas diagonais.

Um fato análogo vale para matrizes triangulares inferiores.

Se

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$p_E(x) = (x-1)^2$$

logo o único autovalor é 1.

- A multiplicidade algébrica do autovalor 1 é 2.
- Vamos determinar a multiplicidade geométrica do autoespaço associado:

  $$\mathscr{E}_1 = \text{nul}(1I - E) = \text{nul} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Lembre-se de que a dimensão do espaço nulo de uma matriz é o número de colunas sem pivôs em uma forma escalonada. Neste caso, $\dim(\mathscr{E}_1) = 1$.

Portanto, a matriz E não é diagonalizável.

Exemplos

A matriz do início

Seja $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Então

$$\begin{aligned} p_X(t) &= \det\left(\begin{bmatrix} t - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & t - \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) \\ &= (t - \frac{1}{4})(t - \frac{1}{2}) - \frac{3}{8} \\ &= t^2 - \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

cujas raízes são

$$\frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad p_X(t) = t^2 - \frac{3}{4}t - \frac{1}{4} = (t-1)(t+\frac{1}{4})$$

A matriz tem ordem 2 e 2 autovalores distintos: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, logo é diagonalizável. Vamos calcular bases para os autoespaços.

- Para $\lambda_1 = 1$: $\mathscr{E}_1 = \operatorname{nul}(I - X) = \operatorname{nul}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

  Para calcular espaço nulo, resolvemos o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  ou seja, $(x, y) \in \mathscr{E}_1 \iff x = \frac{2}{3}y$, i.e., $(x, y) = y(\frac{2}{3}, 1)$.

  Segue que $B_1 = \{(2, 3)\}$ é base de $\mathscr{E}_1$.

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{4}$$

- $B_1 = \{(2,3)\}$ é base de $\mathscr{E}_1$
- Para $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$: $\mathscr{E}_{-\frac{1}{4}} = \mathrm{nul}(-\frac{1}{4}I - X) = \mathrm{nul}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$

  Para calcular espaço nulo, resolvemos o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  ou seja, $(x,y) \in \mathscr{E}_1 \iff x = -y$, i.e., $(x,y) = y(-1,1)$.

  Segue que $B_2 = \{(-1,1)\}$ é base de $\mathscr{E}_2$.

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{4}$$

- $B_1 = \{(2,3)\}$ é base de $\mathscr{E}_1$
- $B_2 = \{(-1,1)\}$ é base de $\mathscr{E}_2$.

Obtemos a "autobase" $B = \{(2,3),(-1,1)\}$ para X. Construímos a matriz $P = [\mathrm{id}]^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, que tem os elementos dessa base nas colunas.
Então

$$P^{-1}XP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = D$$

é diagonal, e $X = PDP^{-1}$.

Exemplo

Diagonalizável ou não?

A matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem polinômio característico

$$p_C(x) = \det \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 + 1$$

que só tem raízes complexas: i e $-i$.

Comofas?