O Teorema Espectral

Álgebra Linear – Videoaula 24

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Motivação *ad hoc*

Trabalhar com matrizes diagonais é simples:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-1) & & \\ & 2+0 & \\ & & (-3)+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) & & \\ & 2\cdot 0 & \\ & & (-3)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & -6 \end{bmatrix}$$

Motivação *ad hoc*

Mais geralmente, para $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n + b_n \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{aligned} \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) + \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) &= \operatorname{diag}(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) &= \operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n) = BA \end{aligned}$$

Em particular, matrizes diagonais comutam!

Seria bom se toda matriz fosse diagonal. . .

Definição

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$, onde V é um EPI complexo de dimensão finita.

Dizemos que T é **unitariamente diagonalizável** se existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que $\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ é diagonal.

(Dizemos que $\mathcal{B}$ diagonaliza T.)

Definição

Seja $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Dizemos que A é **unitariamente diagonalizável** se existe uma matriz unitária $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que UAU^* é diagonal.

(Dizemos que U diagonaliza A.)

Diagonalizabilidade simultânea (caso complexo)

Lema

Se $\mathcal{B}$ é uma base que diagonaliza duas transformações $T, S \in \mathrm{L}(V)$ simultaneamente, então T e S comutam, i.e., $TS = ST$.

De fato, se $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ são diagonais então comutam, logo S e T comutam: Em detalhes,

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

$$[TS]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [ST]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

$$TS = ST$$

Diagonalizabilidade unitária (caso complexo)

Lema

Se V é um EPI complexo de dimensão finita e $T \in \mathrm{L}(V)$ é unitariamente diagonalizável, então $T^*T = TT^*$.

Se uma base ortonormal $\mathcal{B}$ diagonaliza T, então

$$\left[T^*\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^*$$

é a adjunta de uma diagonal, logo diagonal. Então $\left[T^*\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e $\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ comutam, logo T^* e T comutam: $T^*T = TT^*$.

Matrizes e endomorfismos normais e autoadjuntos (casos real e complexo)

Definição

Um endomorfismo linear $T \in \mathrm{L}(V)$, onde V é um EPI real ou complexo de dimensão finita, é **normal** se $T^*T = TT^*$.

Definição

Uma matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ é **normal** se $A^*A = AA^*$.

Definição

Um endomorfismo linear $T \in \mathrm{L}(V)$, onde V é um EPI real ou complexo de dimensão finita, é **auto-adjunto** se $T^* = T$.

Definição

Uma matriz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ é **auto-adjunta** se $A^* = A$.

Exemplo de uma matriz normal (caso complexo)

Considere a matriz de rotação

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Então

$$p_{R_\theta}(x) = \det \begin{bmatrix} x - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & x - \cos(\theta) \end{bmatrix} = x^2 - 2x\cos(\theta) + 1$$

cujas raízes são

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \frac{2\cos(\theta) \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} \\ &= \cos(\theta) \pm \sqrt{-(1-\cos^2\theta)} \\ &= \cos(\theta) \pm i\sin\theta \end{aligned}$$

Exemplo de uma matriz normal (caso complexo)

Os autovalores de R_θ são

$$\lambda_\pm \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$$

- Se θ, é múltiplo de π, há somente uma única raiz $\lambda = \pm 1$, e $R_\theta = \pm I_2$.
- Se θ não é múltiplo de π, então $1, i$ e $v_\pm = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_\pm = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$

Teorema (Teorema Espectral Complexo, versão com endomorfismos)

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{L}(V)$ endomorfismos em um EPI complexo de dimensão finita.
São equivalentes:

1. *$A_1, \ldots, A_k$ são normais e comutam.*
2. *V admite uma base ortonormal cujos elementos são autovetores simultâneos de $A_1, \ldots, A_k$.*
3. *Existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V que diagonaliza $A_1, \ldots, A_k$ simultaneamente.*

Já sabemos que 2 $\Longleftrightarrow$ 3 e que 3$\Rightarrow$1.

Fixemos um EPI complexo V de dimensão finita.

Lema C1

Se $A \in \mathrm{L}(V)$ é normal, então para todo $v \in V$ vale que $\|A(v)\| = \|A^*(v)\|$

Se A é normal e $v \in V$ então

$$\begin{aligned}\|A(v)\|^2 &= \langle A(v), A(v)\rangle \\ &= \langle A^*A(v), v\rangle \\ &= \langle AA^*(v), v\rangle \\ &= \langle A^*(v), A^*(v)\rangle \\ &= \|A^*(v)\|^2\end{aligned}$$

Lema C2

Se $A \in \mathrm{L}(V)$ é normal e (λ, v) é autopar de A, então $(\overline{\lambda}, v)$ é autopar de A^*.

De fato, $A - \lambda\,\mathrm{id}_V$ é normal (verifique). Pelo Lema C1,

$$\begin{aligned} \|A^* v - \overline{\lambda} v\|^2 &= \|(A - \lambda\,\mathrm{id})^* v\| \\ &= \|(A - \lambda\,\mathrm{id}) v\| && \text{(Lema C1)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que significa que $A^*(v) = \overline{\lambda} v$.

Lema C3

Se $A, B \in \mathrm{L}(V)$ comutam, onde V é um EPI complexo, então $\ker(A)$ é B-invariante.

De fato, se $v \in \ker(A)$, então

$$A(B(v)) = (AB)(v) = (BA)(v) = B(A(v)) = B(0_V) = 0_V,$$

logo $B(v) \in \ker(A)$. Portanto $B(\ker(A)) \subseteq \ker(A)$.

Lema C4

Se $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{L}(V)$ comutam, onde V é um EPI complexo, então $A_1, \ldots, A_k$ possuem algum autovetor em comum.

Seja λ_1 um autovalor qualquer de A_1.

Como A_1 comuta com todos os A_j, então $A_1 - \lambda_1 \,\mathrm{id}$ também comuta com todos os A_j.

Pelo Lema C3, o auto-espaço $\ker(A_1 - \lambda_1 \,\mathrm{id})$ é A_j-invariante para todo j.

Em particular, A_2 possui algum autovetor em $\ker(A_1 - \lambda_1 \,\mathrm{id})$, com autovalor associado λ_2. Isso significa que $\ker(A_1 - \lambda_1 \,\mathrm{id}) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 \,\mathrm{id})$ é não-trivial.

Lema C4

Se $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{L}(V)$ comutam, onde V é um EPI complexo, então $A_1, \ldots, A_k$ possuem algum autovetor em comum.

Já encontramos λ_1, λ_2 autovalores de A_1, A_2 tais que $\ker(A_1 - \lambda_1 \,\mathrm{id}) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 \,\mathrm{id})$ é não-trivial.

Novamente pelo Lema C3, $\ker(A_2 - \lambda_2 \,\mathrm{id})$ é A_j-invariante para todo j.

Como a intersecção de espaços invariantes é invariante, então $\ker(A_1 - \lambda_1 \,\mathrm{id}) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 \,\mathrm{id})$ é um espaço não-trivial, A_j-invariante para todo j.

Continue repetindo o processo. . .

- Temos λ_1, λ_2, autovalores de A_1, A_2 tais que $\ker(A_1 - \lambda_1 \operatorname{id}) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 \operatorname{id})$ é não-trivial e A_j-invariante para todo j.
- Encontre um autovetor de A_3 em $\ker(A_1 - \lambda_1 \operatorname{id}) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 \operatorname{id})$, com autovalor associado λ_3. Então $\ker(A_1 - \lambda_1 \operatorname{id}) \cap \ker(A_2 - \lambda_2 \operatorname{id}) \cap \ker(A_3 - \lambda_3 \operatorname{id})$ é um subespaço não-trivial, A_j-invariante para todo j pelo Lema C3.
- Repita o argumento até A_k.

No fim, encontraremos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(A_i - \lambda_i \operatorname{id}) = \ker(A_1 - \lambda_1 \operatorname{id}) \cap \cdots \cap \ker(A_k - \lambda_k \operatorname{id})$$

é um subespaço não-trivial de V.

Qualquer vetor não-nulo v neste subespaço é um autovetor comum a todos os $A_1, \ldots, A_k$, associado respectivamente a autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

A prova do teorema (caso complexo)

Pelo Lema C4, tome um autovetor v_1 associado a todos os $A_1, \ldots, A_k$.
SPG, tomamos v_1 unitário.
Tome

$$W_1 = \{v_1\}^{\perp} = \text{span}\,\{v_1\}^{\perp}.$$

Seja $j \in \{1, \ldots, k\}$.

- Como v_1 é autovalor de A_j, então $\text{span}(v_1)$ é A_j-invariante, e $W_1 = \text{span}\,\{v_1\}^{\perp}$ é A_j^*-invariante.
- Pelo Lema C2, v_1 também é autovalor de A_j^*. Pelo mesmo argumento que acima, W_1 é A_j-invariante.

Obtemos uma decomposição ortogonal

$$V = \operatorname{span}\{v_1\} \oplus W_1,$$

onde v_1 é autovetor de A_j e W_1 é A_j, A_j^*-invariante para todo j.
Em particular, as compressões dos A_j satisfazem

$$(A_j)_{W_1}^* = (A_j^*)_{W_1},$$

logo são normais, e claramente comutam.
Restrinja tudo a W_1 e repita o argumento: Encontre um autovetor $v_2 \in W_1$ (SPG unitário) comum a todos os A_j, de forma que tenha-se uma decomposição ortogonal

$$W_1 = \operatorname{span}\{v_2\} \oplus W_2,$$

com W_2 A_j e A_j^*-invariante para todo j.

Obtemos uma decomposição ortogonal

$$V = \operatorname{span}\{v_1\} \oplus \operatorname{span}\{v_2\} \oplus W_2.$$

Note que $\dim(W_2) = \dim(V) - 2$.

Repetindo o argumento, obtém-se sucessivamente decomposições ortogonais

$$V = \operatorname{span}\{v_1\} \oplus \cdots \oplus \operatorname{span}\{v_p\} \oplus W_p,$$

com $v_1, \ldots, v_p$ autovetores unitários comuns a todos os A_j e W_p sendo A_j e A_j^*-invariante para todo j. Ademais, $\dim(W_p) = \dim(V) - p$.

No fim, temos uma decomposição ortogonal

$$V = \text{span}\{v_1\} \oplus \text{span}\{v_2\} \oplus \cdots \oplus \text{span}\{v_n\}$$

com $v_1, \ldots, v_n$ autovetores ortogonais unitários comuns a todos os A_j.

Estes vetores formam a base ortonormal desejada.

Teorema (Teorema Espectral Complexo, versão matricial)

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. *São equivalentes:*

1. $A_1, \ldots, A_k$ *são normais e comutam.*
2. $\mathbb{C}^{n\times 1}$ *admite uma base ortonormal cujos elementos são autovetores simultâneos de* $A_1, \ldots, A_k$.
3. *Existe uma matriz unitária* $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *tal que* UA_jU^* *é diagonal para todo* j.

Teorema (Teorema Espectral Complexo)

Seja $A \in \mathrm{L}(V)$ um endomorfismo em um EPI complexo de dimensão finita. São equivalentes:

1. *A é normal.*
2. *V admite uma base ortonormal cujos elementos são autovetores de A.*
3. *Existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V que diagonaliza A.*

O Teorema Espectral Complexo

Diagonalizabilidade de uma única matriz

Teorema (Teorema Espectral Complexo, versão matricial)

Sejam $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. São equivalentes:

1. *A é normal.*
2. *$\mathbb{C}^{n\times 1}$ admite uma base ortonormal cujos elementos são autovetores de A.*
3. *Existe uma matriz unitária $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tal que UAU^* é diagonal.*

Definição

Seja $T \in \mathrm{L}(V)$, onde V é um EPI real de dimensão finita.

Dizemos que T é **unitariamente/ortogonalmente diagonalizável** se existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que $\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ é diagonal.

(Dizemos que $\mathcal{B}$ diagonaliza T.)

Definição

Seja $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Dizemos que A é **ortogonalmente diagonalizável** se existe uma matriz ortogonal $U \in M_n(\mathbb{R})$ tal que UAU^* é diagonal.

(Dizemos que U diagonaliza A.)

Diagonalizabilidade simultânea (caso real)

Lema

Se $\mathcal{B}$ é uma base que diagonaliza duas transformações $T, S \in \mathrm{L}(V)$ simultaneamente, então T e S comutam, i.e., $TS = ST$.

Mesma prova do caso complexo.

Diagonalizabilidade unitária (caso real)

Lema

Se V é um EPI real de dimensão finita e $T \in \mathrm{L}(V)$ é unitariamente diagonalizável, então $T = T^*$.

Se uma base ortonormal $\mathcal{B}$ diagonaliza T, então

$$\left[T^*\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^t$$

é a transposta de uma diagonal, logo a mesma matriz: $\left[T^*\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, logo $T = T^*$.

Teorema (Teorema Espectral Real, versão com endomorfismos)

Sejam $A_1, \dots, A_k \in \mathrm{L}(V)$ endomorfismos em um EPI real de dimensão finita.

São equivalentes:

1. *$A_1, \dots, A_k$ são auto-adjuntos e comutam.*
2. *V admite uma base ortonormal cujos elementos são autovetores simultâneos de $A_1, \dots, A_k$.*
3. *Existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V que diagonaliza $A_1, \dots, A_k$ simultaneamente.*

Já sabemos que 2 $\iff$ 3 e que 3 $\Rightarrow$ 1.

Fixemos um EPI real V de dimensão finita.

Lema R1

1. Se T é um operador auto-adjunto num EPI complexo, então seus auto-valores são todos reais.
2. Todo operador auto-adjunto num EPI real tem algum autovalor real.

1. Se (λ, v) é um auto-par de um operador auto-adjunto T num EPI complexo, então

$$
\begin{aligned}
\langle T(v), v\rangle &= \langle v, T(v)\rangle \\
\langle \lambda v, v\rangle &= \langle v, \lambda v\rangle \\
\lambda\langle v, v\rangle &= \overline{\lambda}\langle v, v\rangle \\
\lambda &= \overline{\lambda},
\end{aligned}
$$

pois $v \neq 0_V$. Portanto, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lema R1

1. Se T é um operador auto-adjunto num EPI complexo, então seus auto-valores são todos reais. ✓
2. Todo operador auto-adjunto num EPI real tem algum autovalor real.

2. Represente T em uma base ortonormal qualquer: $M = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

   A matriz M tem entradas reais, mas vamos vê-la como complexa (o polinômio característico continua o mesmo).

   Essa matriz tem algum autovalor λ (pelo caso complexo). Pelo item 1, esse autovalor é real, ou seja, λ é um número real tal que $p_T(\lambda) = p_M(\lambda) = 0$, ou seja, λ é um autovalor de T.

Lema R2

Se $A, B \in \mathrm{L}(V)$ comutam, onde V é um EPI real, então $\ker(A)$ é B-invariante.

Mesma prova do Lema C3.

Lema R3

Se $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{L}(V)$ comutam e são auto-adjuntos, onde V é um EPI real, então $A_1, \ldots, A_k$ possuem algum autovetor em comum.

Mesma prova do Lema C4.

A prova do teorema (caso real)

A mesma do caso complexo (na verdade é até mais fácil, pois $A_j = A_j^*$).

Teorema (Teorema Espectral Real, versão matricial)

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*. São equivalentes:*

1. $A_1, \ldots, A_k$ *são auto-adjuntos e comutam.*
2. $\mathbb{R}^{n\times 1}$ *admite uma base ortonormal cujos elementos são autovetores simultâneos de* $A_1, \ldots, A_k$*.*
3. *Existe uma matriz ortogonal* $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *tal que* UA_jU^* *é diagonal para todo* j*.*

Teorema (Teorema Espectral Real)

Seja $A \in \mathrm{L}(V)$ um endomorfismo em um EPI real de dimensão finita. São equivalentes:

1. *A é auto-adjunto.*
2. *V admite uma base ortonormal cujos elementos são autovetores de A.*
3. *Existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V que diagonaliza A.*

Teorema (Teorema Espectral Real, versão matricial)

Sejam $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. São equivalentes:

1. *A é auto-adjunto.*
2. *$\mathbb{R}^{n\times 1}$ admite uma base ortonormal cujos elementos são autovetores de A.*
3. *Existe uma matriz ortogonal $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tal que UAU^* é diagonal.*