Somas de subespaços vetoriais

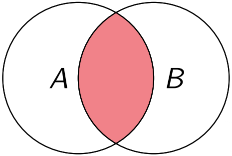
Álgebra Linear – Videoaula 3

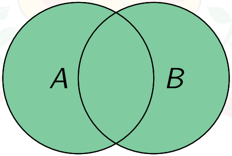
Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Se A e B são subconjuntos de um conjunto X:

- O "maior subconjunto que é menor do que A e do que B" é $A \cap B$.
- O "menor subconjunto que é maior do que A e do que B" é $A \cup B$.





Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V:

- O "maior subespaço que é menor do que W_1 e do que W_2" é $W_1 \cap W_2$.
- O "menor subespaço que é maior do que W_1 e do que W_2" é ???.

O subespaço ??? tem que ter, pelo menos, as somas dos elementos de W_1 com os de W_2.

Definição

Sejam $W_1, \ldots, W_n$ subespaços vetoriais de V. A **soma** de $W_1, \ldots, W_n$ é

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = W_1 + \cdots + W_n$$
$$= \{w_1 + \cdots + w_n : w_i \in W_i \text{ para todo } i\}.$$

Teorema

$W := W_1 + \cdots + W_n$ é um subespaço de V.

1. $\underline{W \neq \varnothing}$, pois
$$0_V = \underbrace{0_V}_{\in W_1} + \cdots + \underbrace{0_V}_{\in W_n} \in W.$$

2. $\underline{\text{Se } x, y \in W \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ então } x + \lambda y \in V}$: De fato, podemos escrever
$$x = v_1 + \cdots + v_n \quad \text{e} \quad y = w_1 + \cdots + w_n,$$
onde $v_i, w_i \in W_i$. Assim,
$$\begin{aligned} x + \lambda y &= (v_1 + \cdots + v_n) + \lambda(w_1 + \cdots + w_n) \\ &= \underbrace{(v_1 + \lambda w_1)}_{\in W_1} + \cdots + \underbrace{(v_n + \lambda w_n)}_{\in W_n} \\ &\in W. \end{aligned}$$

Teorema

A soma $W = W_1 + \cdots + W_n$ satisfaz:

1. $W_i \subseteq W$ *para todo* i.
   (W *contém todos os termos* W_i*.)*
2. *Se* U *é outro subespaço tal que* $W_i \subseteq U$ *para todo* i*, então* $W \subseteq U$.
   (W *é menor que qualquer outro subespaço que contém todos os termos* W_i*.)*

1. Dado i e $w_i \in W_i$, temos que

$$w_i = \underbrace{0_V}_{\in W_1} + \cdots + \underbrace{0_V}_{\in W_{i-1}} + \underbrace{w_i}_{\in W_i} + \underbrace{0_V}_{\in W_{i+1}} + \cdots + \underbrace{0_V}_{\in W_n}$$
$$\in W.$$

Portanto, $W_i \subseteq W$ para todo i.

2. Suponha que U é subespaço tal que $W_i \subseteq U$ para todo i. Se $w \in W$, então

$$w = w_1 + \cdots + w_n,$$

onde $w_i \in W_i$. Logo,

$$\begin{aligned} w = &\underbrace{w_1}_{\in W_1 \subseteq U} + \cdots + \underbrace{w_n}_{\in W_n \subseteq U} \\ \in &\, U. \end{aligned}$$

Portanto, $W \subseteq U$.

Exemplos de somas

Sejam $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, e

- $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix}$;
- $D = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$.

Então $W + D = V$. De fato,

- $W + D \subseteq V$ ($\checkmark$).
- $V \subseteq W + D$: Seja $v \in V$. Devemos escrever $v = w + d$, onde $w \in W$ e $d \in D$.

Rascunho

$V \subseteq W + D$.

Temos

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \in V = \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Queremos encontrar

$$w = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & 0 \end{bmatrix} \in W \quad \text{e} \quad d = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \in D$$

tais que

$$v = w + d,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplos de somas

Rascunho

$V \subseteq W + D$.

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} + d_{11} & w_{12} \\ w_{21} & d_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} w_{11} + d_{11} & = & v_{11} \\ w_{12} & = & v_{12} \\ w_{21} & = & v_{21} \\ d_{22} & = & v_{22} \end{cases}$$

Podemos tomar, por exemplo, $w_{11} = v_{11}$ e $d_{11} = 0$.

Prova formal

$V \subseteq W + D$.

Seja $v \in V$. Então $v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$ para certos $v_{ij} \in \mathbb{R}$.

Considere

$$w = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & 0 \end{bmatrix} \in W$$

e

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} \in D.$$

Então

$$w + d = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = v,$$

ou seja, $v = w + d \in W + D$.

Exemplos de somas

Prova formal

$V \subseteq W + D$.

Isto prova que todo elemento de V também pertence a $W + D$, o que significa que $V \subseteq W + D$.

Concluímos que

- $W + D \subseteq V$; e
- $V \subseteq W + D$,

que significa que $V = W + D$.

Considere os subespaços de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

- $P = \{\text{funções pares}\} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(-x) = f(x) \text{ para todo } x\right\}$;
- $I = \{\text{funções ímpares}\} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x\right\}$;

Então $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P + I$.

- $P + I \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ($\checkmark$)

Seja $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Queremos $p \in P$ e $i \in I$ tais que $f = p + i$, ou seja,

$$f(x) = p(x) + i(x) \text{ para todo } x.$$

Utilizando a igualdade com $-x$ no lugar de x,

$$\begin{aligned} f(-x) &= p(-x) + i(-x) \\ &= p(x) - i(x) \end{aligned}$$

Para todo x,

$$\begin{cases} p(x) & + & i(x) & = & f(x) \\ p(x) & - & i(x) & = & f(-x) \end{cases}$$

A única solução para $p(x)$ e $i(x)$ em função de $f(x)$ e $f(-x)$ é

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Seja $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Defina $p, i \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ por

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

para todo x.

Vamos mostrar que $p \in P$. De fato, para todo x,

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = p(x).$$

Portanto, $p \in P$.
Similarmente, $i \in I$.

Para todo x, temos

$$\begin{aligned}(p+i)(x) &= p(x) + i(x) \\ &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Portanto, $f = p + i \in P + I$.

Concluímos que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P + I$.

Dois conjuntos A, B são **disjuntos** se $A \cap B = \varnothing$.

Dois subespaços U, W são **independentes** se $U \cap W$ é trivial.

Definição

Dois subespaços U, W de um espaço vetorial V são **independentes** se $U \cap W = \{0_V\}$.

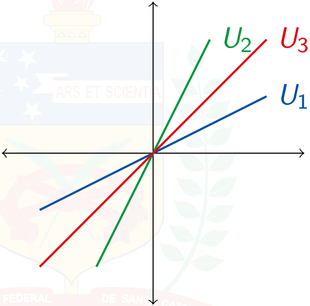
Mas e como definir "independência" para mais subespaços?

Subespaços independentes

Um exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e considere os subespaços

- $U_1 = \{(2x, x) : x \in \mathbb{R}\}$
- $U_2 = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$
- $U_3 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.



Então

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0_V\}\,.$$

Mas

$$U_1 \subseteq U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$$

Então de certo modo U_1 não é “independente” de U_2 e U_3.

Definição

Uma coleção de subespaços $W_1, W_2, \ldots, W_n$ de um espaço vetorial V é **independente** se para todo i, tem-se que

$$W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) = \{0_V\} .$$

E.g. para $n = 3$, W_1, W_2, W_3 são independentes se

$$\begin{aligned} W_1 \cap (W_2 + W_3) &= \{0_V\} , \\ W_2 \cap (W_1 + W_3) &= \{0_V\} , \text{ e} \\ W_3 \cap (W_1 + W_2) &= \{0_V\} . \end{aligned}$$

Teorema

Sejam $W_1, \dots, W_n$ subespaços vetoriais de V. São equivalentes:

1. *$W_1, \dots, W_n$ são independentes.*
2. *Se $w_1 \in W_1$, ..., $w_n \in W_n$ são tais que*
$$w_1 + \cdots + w_n = 0_V,$$
então $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 0_V$.
3. *Cada vetor v de $W_1 + \cdots + W_n$ admite uma **única** representação como soma de elementos dos W_i.*

(1⇒2)

Suponha $W_1, \ldots, W_n$ independentes e

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 0_V,$$

onde $w_i \in W_i$. Então

$$w_1 = (-w_2) + \cdots + (-w_n) \in W_1 \cap (W_2 + \cdots + W_n) = \{0_V\},$$

logo $w_1 = 0_V$.

Similarmente,

$$w_2 = (-w_1) + (-w_3) \cdots + (-w_n) \in W_2 \cap (W_1 + W_3 + \cdots + W_n) = \{0_V\},$$

logo $w_2 = 0_V$.

Mais geralmente,

$$w_i = \sum_{j\neq i}(-w_j) \in W_i \cap \left(\sum_{j\neq i} W_j\right) = \{0_V\},$$

logo $w_i = 0_V$, para todo i.

(2⇒3)

Suponha

$$
\begin{aligned}
v &= w_1 + \cdots + w_n \\
&= w_1' + \cdots + w_n'
\end{aligned}
$$

onde $w_i, w_i' \in W_i$. Então

$$
\begin{aligned}
(w_1 - w_1') + \cdots + (w_n - w_n') &= (w_1 + \cdots + w_n) - (w_1' + \cdots + w_n') \\
&= v - v \\
&= 0_V,
\end{aligned}
$$

e $(w_i - w_i') \in W_i$. Logo $w_i - w_i' = 0_V$, por (2), ou seja, $w_i = w_i'$ para todo i.

(3⇒1)

Suponha $v \in W_i \cap \left(\sum_{j\neq i} W_j\right)$. Então

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j\neq i} w_j \\ &= w_1 + \cdots + w_{i-1} + w_{i+1} + \cdots + w_n, \end{aligned}$$

onde $w_j \in W_j$ para $j \neq i$. Pondo $w_i = -v \in W_i$, temos

$$\begin{aligned} w_1 + \cdots + w_{i-1} + w_i + w_{i+1} + \cdots + w_n &= w_i + \sum_{j\neq i} w_j \\ &= (-v) + v \\ &= 0_V \end{aligned}$$

$$0_V = \underbrace{w_1}_{\in W_i} + \cdots + \underbrace{w_n}_{\in W_n},$$

e por outro lado

$$0_V = \underbrace{0_V}_{\in W_1} + \cdots + \underbrace{0_V}_{\in W_n}.$$

Como a representação de 0_V é única (por (3)), segue que essas representações são as mesmas: $w_1 = 0_V$, $w_2 = 0_V, \ldots, w_i = 0_V, \ldots$

$$\begin{aligned} w_i &= 0_V \\ -v &= 0_V \\ v &= 0_V \end{aligned}$$

Tome

- $W = \begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$

Então $W \cap D = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \{0_{2\times 2}\}$, e os subespaços não são independentes.

Tome $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, e

- $P = \{$funções pares$\}$
- $I = \{$funções ímpares$\}$

Então P e I são independentes:se $f \in P \cap I$, então para todo x,

$$f(x) = f(-x) = -f(x),$$

logo $f(x) = 0$.

Portanto $f \equiv 0$ (função zero).

Somas diretas

Quando $W_1, \ldots, W_n$ são independentes, a soma $W = W_1 + \cdots + W_n$ é dita ser uma **soma direta (interna)**, e é denotada por

$$W = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n.$$

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$
-
$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) &= \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$
- $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathbb{R})$.