Subespaços gerados

Álgebra Linear – Videoaula 4

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Pergunta

Se S é um subconjunto qualquer de um espaço vetorial V, como podemos "transformar" S em um subespaço?

Temos duas opções:

- Adicionar somas e/ou múltiplos de vetores de S em S;
- Tomar o "menor subespaço de V que contém S".

Definição

Uma **combinação linear** de elementos $v_1, \dots, v_n$ de um espaço vetorial é um vetor x da forma

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são escalares chamados de **coeficientes**.

Em notação de somatório:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

- O vetor $(17, -4, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de $(2, 1, -3)$ e $(1, -2, 4)$, pois

$$(17, -4, 2) = 6 \cdot (2, 1, -3) + 5 \cdot (1, -2, 4).$$

- O vetor $(17, -4, 5)$ não é combinação linear de $(2, 1, -3)$ e $(1, -2, 4)$, pois não existem números a_1, a_2 tais que

$$(17, -4, 5) = a_1 \cdot (2, 1, -3) + a_2 \cdot (1, -2, 4),$$

pois o sistema linear

$$\begin{cases} 17 & = & 2a_1 & + & a_2 \\ -4 & = & a_1 & - & 2a_2 \\ 5 & = & -3a_1 & + & 4a_2 \end{cases}$$

não tem solução.

Spans

Definição

O **span** de uma família $v_1, \ldots, v_n$ de vetores de V é o subconjunto $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ consistindo das combinações lineares destes elementos.

Mais geralmente, se $S \subseteq V$, então $\operatorname{span}(S)$ consiste de todas as combinações lineares de elementos de S.

Convenção: $\operatorname{span}(\varnothing) = \{0_V\}$.

Teorema

span(S) *é, de fato, um subespaço vetorial de* V.

Se $u, v \in \text{span}(S)$, então

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n$$

e

$$v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j t_j = \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_m t_m,$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ e $s_i, t_j \in S$.

Teorema

span(S) *é, de fato, um subespaço vetorial de* V.

Então, dado $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u + \lambda v &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \right) + \lambda \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j t_j \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \right) + \left(\sum_{j=1}^{m} (\lambda \beta_j) t_j \right) \\ &= \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n + (\lambda \beta_1) t_1 + \cdots + (\lambda \beta_m) t_m, \end{aligned}$$

uma combinação linear de elementos de S.
Portanto, $u + \lambda v \in \operatorname{span}(S)$ sempre que $u, v \in \operatorname{span}(S)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, o que prova que span(S) é, de fato, um subespaço vetorial de V.

Q. É possível somar uma quantidade infinita de termos?

R. Somente se quase todos eles forem zero!

Se $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = \cdots = 0$, então

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots \\
&= 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots \\
&= 1 + 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Spans

Combinações lineares em conjuntos infinitos?

Assim, $\mathrm{span}(S)$ consiste dos vetores da forma

$$v = \sum_{s \in S} \lambda_s \cdot s,$$

onde somente uma quantidade finita dos coeficientes λ_s é $\neq 0$.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

$$\mathrm{span}\left\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\right\} = \mathbb{R}[x].$$

Mas se

$$\operatorname{span}(S) = \left\{ \sum_{s\in S}^{\text{finita}} \lambda_s s : \lambda_s \in \mathbb{R} \right\},$$

o que acontece quando $S = \varnothing$?

$$\operatorname{span}(\varnothing) = \left\{ \underbrace{\sum_{s\in\varnothing} \lambda_s s}_{\text{soma vazia}} : \lambda_s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{0_V\}.$$

Subespaços gerados

Definição

Seja S um subconjunto do espaço vetorial V. O **subespaço gerado** por S é a intersecção de todos os subespaços de V que o contêm:

$$\langle S \rangle = \bigcap \{ W : W \text{ é subespaço de } V \text{ e } S \subseteq W \}.$$

- $\langle S \rangle$ é subespaço;
- $\langle S \rangle$ contém S;
- $\langle S \rangle$ está contido em qualquer subespaço que contém S.

Subespaços gerados e spans coincidem

Teorema

Seja S um subconjunto do espaço vetorial V. Então $\operatorname{span}(S) = \langle S \rangle$.

Primeiro, devemos provar que

$$\operatorname{span}(S) \subseteq \langle S \rangle = \bigcap \{W : W \text{ é subespaço de } V \text{ e } S \subseteq W\}.$$

Seja W um subespaço de V com $S \subseteq W$. Vamos mostrar que $\operatorname{span}(S) \subseteq W$.

Subespaços gerados e spans coincidem

Seja $x \in \text{span}(S)$. Então

$$x = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \cdots + \lambda_n s_n,$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $s_1, \ldots, s_n \in S$. Mas daí,

$$x = \lambda_1 \underbrace{s_1}_{\in W} + \lambda_2 \underbrace{s_2}_{\in W} + \cdots + \lambda_n \underbrace{s_n}_{\in W} \in W.$$

Isso mostra que $\text{span}(S) \subseteq W$, sempre que W é um subespaço vetorial de V tal que $S \subseteq W$.
Portanto,

$$S \subseteq \bigcap \{W : W \text{ é subespaço de } V \text{ e } S \subseteq W\} = \langle S \rangle.$$

Subespaços gerados e spans coincidem

Agora devemos mostrar que $\langle S\rangle \subseteq \text{span}(S)$. Mas já sabemos que:

- $\underline{\text{span}(S) \text{ é subespaço de } V.\ (\checkmark)}$
- $\underline{S \subseteq \text{span}(S)}$: Cada $s \in S$ é combinação linear de elementos de S: $s = 1 \cdot s$.

Portanto,

$$\langle S\rangle = \bigcap \{W : W \text{ é subespaço de } V \text{ e } S \subseteq W\} \subseteq \text{span}(S).$$

Geradores et. al

Se $W = \langle S \rangle$, dizemos que

- W é **gerado** por S.
- S **gera** W.
- S é **gerador** para W.

Subespaços e ordem

Note que:

- Se $S \subseteq T$, então $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$,
- Para quaisquer dois subespaços vetoriais $U_1, U_2 \subseteq V$, vale que $U_1 \subseteq U_1 + U_2$ e $U_2 \subseteq U_1 + U_2$.
- Se $U_1, U_2 \subseteq W$ (subespaços), então $U_1 + U_2 \subseteq W$.

Teorema

Se $A, B \subseteq V$, então $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$.

Por um lado,

$$A \subseteq \langle A \rangle \subseteq \langle A \rangle + \langle B \rangle,$$

e similarmente,

$$B \subseteq \langle B \rangle \subseteq \langle A \rangle + \langle B \rangle.$$

Logo, $A \cup B \subseteq \langle A \rangle + \langle B \rangle$, e portanto

$$\langle A \cup B \rangle \subseteq \langle A \rangle + \langle B \rangle.$$

Teorema

Se $A, B \subseteq V$, então $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$.

Por outro lado,

$$\langle A \rangle \subseteq \langle A \cup B \rangle,$$

e similarmente

$$\langle B \rangle \subseteq \langle A \cup B \rangle.$$

Portanto, $\langle A \rangle + \langle B \rangle \subseteq \langle A \cup B \rangle$.

Teoria de conjuntos e Álgebra Linear

Conjuntos	**Espaços vetoriais**
Subconjuntos	Subespaços vetoriais
Intersecção $A \cap B$	Intersecção $U \cap W$
União $A \cup B$	Soma $U + W$
Conjunto vazio $\varnothing$	Espaço nulo $\{0_V\}$
Subconjuntos disjuntos $A \cap B = \varnothing$	Subespaços independentes $U \cap W = \{0_V\}$
Número de elementos	??? – DIMENSÃO