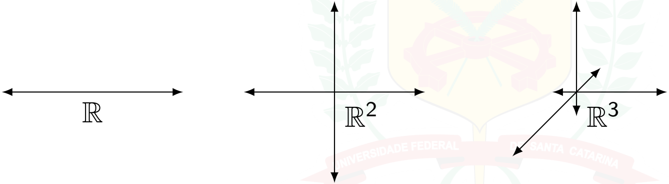
Bases e dimensão

Álgebra Linear – Videoaula 6

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Qual o "tamanho" de um espaço vetorial?



Quantos vetores são necessários para formar cada um desses espaços?

Definição

Uma **base** de um espaço vetorial V é um conjunto $\mathcal{B} \subseteq V$ que é gerador e linearmente independente.

Bases canônicas

- $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$
- Fixado $n \in \mathbb{N}$ e dado $i \leq n$, denotamos

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1,0,0,\ldots,0)\\
e_2 &= (0,1,0,\ldots,0)\\
&\vdots\\
e_i &= (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)\\
&\vdots\\
e_n &= (0,\ldots,0,0,1)
\end{aligned}
$$

  Então $\mathcal{E}_n = \{e_1,\ldots,e_n\}$ é a **base canônica** de $\mathbb{R}^n$.
- $\left\{1,x,x^2,x^3,\ldots\right\}$ é uma base para $\mathbb{R}[x]$.

Um espaço vetorial V é **finitamente gerado** se existe um conjunto finito $F \subseteq V$ tal que $V = \langle F \rangle$.

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n$ são finitamente gerados (têm dimensão finita)
- $\mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado;
- $\mathbb{R}[x]$ não é finitamente gerado;
- $\mathbb{R}^X$ é finitamente gerado se, e somente se, X é finito;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ não é finitamente gerado.

Teorema

*Se V é finitamente gerado e $S \subseteq V$ é tal que $\langle S \rangle = V$, então existe $S' \subseteq S$ **finito** tal que $\langle S' \rangle = V$.*

Como V é finitamente, gerado, existe $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ tal que $V = \langle F \rangle$.

Como $\langle S \rangle = V$, então cada f_i é combinação linear de elementos de S:

$$f_i = \lambda_1 s_{i,1} + \cdots + \lambda_{n(i)} s_{i,n(i)}.$$

Tome $S_i = \left\{s_{i,1}, \ldots, s_{i,n(i)}\right\} \subseteq S$, que é finito tal que $f_i \in \langle S_i \rangle$.

Seja $S' = S_1 \cup \cdots \cup S_n$. Então S' é finito e

$$V = \langle F \rangle \subseteq \langle S_1 \cup \cdots \cup S_n \rangle = \langle S' \rangle.$$

Teorema

Se V é um espaço vetorial, $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ é gerador (e finito) e $L \subseteq V$ é LI, então L tem no máximo n elementos.

Suponha que L tivesse $n+1$ elementos $\ell_1, \ldots, \ell_{n+1}$.

Primeiro, escrevemos ℓ_1 como combinação linear dos f_j:

$$\ell_1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{1,j} f_j.$$

Como $\ell_1 \neq 0_V$, algum $\lambda_{1,j}$ é $\neq 0$.Reordenando se necessário, digamos que $\lambda_{1,1} \neq 0$.

Vamos "trocar" ℓ_1 com f_1 em F: Definimos

$$F_1 = \{\ell_1, f_2, \ldots, f_n\}.$$

Como $\lambda_{1,1} \neq 0$, segue que F_1 é gerador de V, pois

$$\ell_1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{1,j} f_j. \iff f_1 = \frac{1}{\lambda_{1,1}} \ell_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{\lambda_{1,j}}{\lambda_{1,1}} f_j.$$

Agora repetimos o argumento com ℓ_2: Escrevemos ℓ_2 como combinação linear dos elementos de F_1:

$$\ell_2 = \mu_{2,1}\ell_1 + \sum_{j\neq 1} \lambda_{2,j} f_j.$$

Como L é linearmente independente, os $\lambda_{2,j}$ não podem ser todos nulos. A menos de reordenação, suponha $\lambda_{2,j} \neq 0$. Vamos "trocar" ℓ_2 com f_2: Definimos

$$F_2 = \{\ell_1, \ell_2, f_3, \ldots, f_n\}.$$

Como $\lambda_{2,2} \neq 0$, segue que F_2 é gerador de V.

Repetimos este processo: Dado $F_k = \{\ell_1, \ldots, \ell_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ gerador, escrevemos ℓ_{k+1} como combinação linear de seus elementos:

$$\ell_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \mu_{k+1,i}\ell_i + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_{k+1,j} f_j.$$

Como L é linearmente independente, os $\lambda_{k+1,j}$ não podem ser todos nulos. A menos de reordenação, suponha $\lambda_{k+1,k+1} \neq 0$. Vamos "trocar" ℓ_{k+1} com f_{k+1}: Definimos

$$F_{k+1} = \{\ell_1, \ldots, \ell_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_n\}.$$

Como $\lambda_{k+1,k+1} \neq 0$, segue que F_{k+1} é gerador de V.

No fim, temos que $F_n = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ é gerador. Mas então ℓ_{n+1} é combinação linear de $\ell_1, \ldots, \ell_n$, contradizendo que L é LI.

Portanto, L tem no máximo n elementos.

Existência de bases

Teorema

Se V é um espaço vetorial e

- $L \subseteq V$ *é LI.*
- $G \subseteq V$ *é gerador.*
- $L \subseteq G$.

então existe uma base $\mathcal{B}$ *de* V *com* $L \subseteq \mathcal{B} \subseteq G$.

Existência de bases

Caso finitamente gerado: SPG ("sem perda de generalidade") assumimos G e L finitos.

$$G = \left\{ \underbrace{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n}_{L}, g_1, \ldots, g_m \right\}.$$

- $L_0 = L$;
- $L_1 = \begin{cases} L_0 \cup \{g_1\}, & \text{se for LI} \\ L_0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $L_2 = \begin{cases} L_1 \cup \{g_2\}, & \text{se for LI} \\ L_1, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $\ldots$
- $L_{k+1} = \begin{cases} L_k \cup \{g_{k+1}\}, & \text{se for LI} \\ L_k, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Então L_m tem as propriedades:

- $L \subseteq L_m \subseteq G$
- L_m é LI;
- Se $g \in G \setminus L_m$ então $L_m \cup \{g\}$ é LD.

Vamos mostrar que L_m é gerador (e portanto base).

Existência de bases

Seja $g \in G$:

- Se $g \in L_m$, então $g \in \langle L_m \rangle$;
- Se $g \notin L_m$, então $L_m \cup \{g\}$ é LD:

$$\mu g + \sum_{b \in L_m} \lambda_b b = 0_V,$$

com coeficientes μ, λ_b não todos nulos.

Se $\mu = 0$, contradiríamos L_m ser LI. Logo $\mu \neq 0$ e

$$g = -\sum_{b \in L_m} \frac{\lambda_b}{\mu} b \in \langle L_m \rangle.$$

Portanto, $G \subseteq \langle L_m \rangle$, e assim $V = \langle G \rangle \subseteq \langle L_m \rangle$.

Existência de bases

Corolário (Todo gerador contém uma base)

Se G é gerador de V, então existe uma base $\mathcal{B}$ de V com $\mathcal{B} \subseteq G$.

Como $\varnothing$ é LI, existe base $\varnothing \subseteq \mathcal{B} \subseteq G$.

Corolário (Todo LI se estende para base)

Se $I \subseteq V$ é LI, então existe uma base $\mathcal{B}$ de V com $I \subseteq \mathcal{B}$.

Como V é gerador, existe base $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq V$.

Corolário (Todo espaço vetorial tem base)

Todo espaço vetorial admite base.

Como $\varnothing$ é LI e V é gerador, existe base $\varnothing \subseteq \mathcal{B} \subseteq V$.

Teorema (Teorema da invariância)

Quaisquer duas bases de um espaço vetorial têm o mesmo número de elementos.

Caso finitamente gerado: Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases, então

- $\mathcal{B}$ é LI e $\mathcal{C}$ é gerador

$$\xRightarrow{\text{Teorema anterior}} \#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{C}.$$

- $\mathcal{C}$ é LI e $\mathcal{B}$ é gerador

$$\xRightarrow{\text{Teorema anterior}} \#\mathcal{C} \leq \#\mathcal{B}.$$

Definição

A **dimensão** de um espaço vetorial V é o número de elementos de qualquer uma de suas bases. Denota-se a dimensão de V por $\dim(V)$

- $\mathbb{R}$: $\{1\}$ é base, logo $\dim(\mathbb{R}) = 1$
- $\mathbb{R}^2$: $\{(1,0),(0,1)\}$ é base, logo $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{E}_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é base, logo $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Dimensão

Espaços de matrizes

Dados m, n, as matrizes

$$e_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i & \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

formam uma base de $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$. Como temos $m \times n$ dessas matrizes, então

$$\dim(\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn.$$

Dimensão infinita

Temos que

$$\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$$

e que

$$\dim(\mathbb{R}^X) = \infty \text{ quando } X \text{ é infinito.}$$

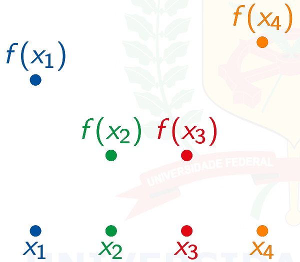
(Mas existem diferentes tipos de (infinito))

Espaços de função

Se $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ é finito, sejam

$$\delta_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_i \\ 0, & \text{c.c. (caso contrário).} \end{cases}$$

(chamadas "funções delta de Kronecker").



$$f = f(x_1)\delta_1 + f(x_2)\delta_2 + f(x_3)\delta_3 + \cdots$$

Espaços de função

Para $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, temos que

- $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ é base de $\mathbb{R}^X$
- $\dim(\mathbb{R}^X) = \#X$

Como fazer para achar uma base de um espaço vetorial?

1. Primeiro encontre um conjunto gerador (finito)
$$\{v_1, v_2, \ldots\}$$
2. Ignore todos os vetores nulos.
3. Tome $B_1 = \{v_1\}$
4. Adicione v_2 se o conjunto continuar LI; caso contrário, não adicione nada
$$B_2 = \begin{cases} B_1 \cup \{v_2\} & \text{, se for LI} \\ B_1 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$
5. Repita o processo acima, adicionando cada v_i se o conjunto resultante for LI:
$$B_{i+1} = \begin{cases} B_i \cup \{v_{i+1}\} & \text{, se for LI} \\ B_i & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

Um exemplo

Encontre uma base e a dimensão para o subespaço vetorial U de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$a = (3, 4, 4), \ b = (-2, 0, -2), \ c = (22, 16, 26), \ d = (-9, -12, -12).$$

Primeiro passo: Adicionamos o primeiro vetor: $B_1 = \{a\}$
Segundo passo: Vamos ver se podemos adicionar o segundo vetor. Para verificar se a, b são LI, podemos escalonar a matriz que tem esses vetores como colunas (teorema da aula passada):

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Um exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 4L_2 \to L_3]{L_1 - 3L_2 \to L_1} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}L_3 \to L_3]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + 2L_3 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores são LI: $B_2 = \{(3,4,4), (-2,0,-2)\}$.

Um exemplo

Terceiro passo: Vamos ver se podemos adicionar o terceiro vetor. Para verificar se a, b, c são LI, podemos escalonar a matriz que tem esses vetores como colunas (teorema da aula passada):

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 22 \\ 4 & 0 & 16 \\ 4 & -2 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Falta um pivô! Os vetores não são LI, não adiciona c: $B_3 = \{a, b\}$.

Um exemplo

Quarto passo: Vamos ver se podemos adicionar o quarto vetor. Para verificar se a, b, d são LI, podemos escalonar a matriz que tem esses vetores como colunas (teorema da aula passada):

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -9 \\ 4 & 0 & -12 \\ 4 & -2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{escalona}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Falta um pivô! Os vetores não são LI, não adiciona d: $B_4 = \{a, b\}$.

Acabamos: $\{a, b\}$ é uma base para $U = \langle\{a, b, c, d\}\rangle$.

Dimensão, dependência linear e conjuntos geradores

Teorema

Se G é gerador de V é $L \subseteq V$ é LI, então

$$\#L \leq \dim(V) \leq \#G.$$

Equivalentemente:

- *Todo conjunto com mais de* $\dim(V)$ *elementos é LD;*
- *Nenhum conjunto com menos de* $\dim(V)$ *elementos é gerador.*

Se $\mathcal{B}$ é base, então $\#\mathcal{B} = \dim(V)$ e

$$\begin{aligned} \#L &\leq \#\mathcal{B} \quad \text{(pois } \mathcal{B} \text{ é gerador)} \\ &\leq \#G \qquad \text{(pois } \mathcal{B} \text{ é LI)} \end{aligned}$$

Como encontrar bases de $\mathbb{R}^n$?

Teorema

Se $\dim(V) = n < \infty$, *então*

- *Todo subconjunto LI de V com n elementos é base;*
- *Todo subconjunto gerador de V com n elementos é base*

Se $G \subseteq V$ é gerador, então existe base $\mathcal{B} \subseteq G$. Então

$$\#G = n = \dim(V) = \#\mathcal{B},$$

logo $G = \mathcal{B}$, que é base.

Como encontrar bases de $\mathbb{R}^n$?

Considere os vetores $\{(1,3,2),(-2,3,1),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.Como

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3-4+3-6+6-1=1,$$

eles são LI, e portanto uma base.