Operações Binárias

Álgebra Linear – Videoaula complementar 1

Luiz Gustavo Cordeiro

UFSC

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

O que é uma operação binária?

Intuição

"Uma operação binária é um modo criar um novo objeto a partir de dois objetos anteriores."

Exemplo

- A **soma de números reais** é uma operação binária: $x, y \in \mathbb{R}$ somados geram $x + y$.

O que é uma operação binária?

Intuição; Outros exemplos

Exemplo

A **união de conjuntos** é uma operação binária: A união de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$ cujos elementos são tanto os elementos de A quanto os elementos de B.

- $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

Exemplo

A **composição de funções** de um conjunto X nele mesmo é uma operação binária: A composta de duas funções $f, g \colon X \to X$ é a função $f \circ g \colon X \to X$ definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

O que é uma operação binária?

Intuição; E quando a operação não está definida?

E a divisão?

- $4 \div 2 = 2$
- $20 \div (-3) = \ -6,666\ldots$
- $0 \div (4,1) = 0$
- $3 \div 0 = ?$

A "operação" não está definida para todos os números!

E a "soma ingênua" de números racionais?

A "soma ingênua" de números racionais é dada por

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{17}{5} \oplus \frac{3}{5} &= \frac{17+3}{5+5} \\ &= \frac{20}{10} = 2.\end{aligned}$$

E a "soma ingênua" de números racionais?

Mas, por outro lado, $\dfrac{3}{5} = \dfrac{18}{30}$, e assim

$$\begin{aligned} \frac{17}{5} \oplus \frac{3}{5} &= \frac{17}{5} \oplus \frac{18}{30} \\ &= \frac{17+18}{5+30} = \frac{35}{35} = 1. \end{aligned}$$

Mas havíamos calculado $\dfrac{17}{5} \oplus \dfrac{3}{5} = 2.$

A "operação" não gera sempre o mesmo resultado!

O que é uma operação binária?

Intuição; E quando a operação não está definida?

E a diferença de números positivos?

A diferença de dois números positivos pode ser negativa:

$$1 - 2 = -1.$$

A "operação" está criando que estão fora do conjunto de interesse.

O que é uma operação binária?

Formalizando

Queremos que as operações binárias em um conjunto X tenham 3 propriedades:

- Está definida para todo par de elementos de X.
- O valor da operação em dois objetos está unicamente determinado.

é uma função definida em $X \times X$.

- O valor da operação sempre cai em X.

O contradomínio é X.

Definição (Operação Binária)

Uma **operação binária** em um conjunto X é uma função $\star\colon X \times X \to X$. Normalmente denotamos $\star(x, y) = x \star y$.

Exemplo (Soma de números reais)

A soma de números reais é a operação

$$\begin{array}{rcrcl} + & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & x + y. \end{array}$$

O que é uma operação binária?

Formalizando

Exemplo (União de conjuntos)

A união de subconjuntos de um conjunto (universo) X é a operação

$$\begin{array}{rrcl} \cup & : \quad \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(X) \\ & (A, B) & \mapsto & A \cup B. \end{array}$$

Propriedades de operações binárias

Definição

Uma operação binária $\star\colon X \times X \to X$ é **comutativa** se para todos $x, y \in X$ vale que $x \star y = y \star x$.

Exemplo

A soma e o produto de números reais são comutativas, pois valem que

$$x + y = y + x \qquad \text{e} \qquad x \cdot y = y \cdot x.$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Considere a operação em $\mathbb{R}$ dada por

$$x \perp y = x + y + 1.$$

Pergunta

A operação $\perp$ é comutativa?

Para verificar que esta operação é comutativa, devemos verificar que

$$x \perp y = y \perp x$$

para todos x e y.
Como $\mathbb{R}$ é infinito, é necessário fazer isso algebricamente.

Por um lado,

$$x \perp y = x + y + 1.$$

e por outro,

$$\begin{aligned} y \perp x &= y + x + 1 \\ &= x + y + 1 = x \perp y, \end{aligned}$$

o que prova que a operação $\perp$ é comutativa.

Definição (Elemento neutro)

Uma operação binária $\star \colon X \times X \to X$ **possui elemento neutro** se existe um elemento $e \in X$ tal que para todo $x \in X$ vale que $e \star x = x \star e = x$. O elemento e é chamado de **elemento neutro** da operação $\star$.

Propriedades de operações binárias

A soma e o produto usuais dos números reais possuem elementos neutros.

- 0 (zero) é o elemento neutro da soma: $0 + x = x + 0 = x$ para todo x.
- 1 (um) é o elemento neutro do produto: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para todo x.

Importante

O elemento neutro depende da operação, e não do conjunto onde a operação é feita.

Considere novamente

$$x \perp y = x + y + 1.$$

Pergunta

A operação $\perp$ tem elemento neutro?

Para verificar que esta operação possui elemento neutro, é necessário descrevê-lo explicitamente.
Ao invés de chutar, podemos tentar procurar um candidato para quem quer quer fosse o elemento neutro.

Se e for um elemento neutro, então temos, para todo x

$$\begin{aligned} e \perp x &= x \\ e + x + 1 &= x \\ e &= -1. \end{aligned}$$

Ou seja, **o melhor candidato** para elemento neutro de $\perp$ é $e = -1$.

Verifiquemos que $e = -1$ é, de fato, elemento neutro de $\perp$ ("prova real").
Por um lado,

$$(-1) \perp x = -1 + x + 1 = x,$$

e por outro

$$x \perp (-1) = x + (-1) + 1 = x,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o que mostra que -1 é elemento neutro de $\perp$.

Considere a operação em $\mathbb{R}$ dada por

$$x \triangleright y = y.$$

Pergunta

Como verificar que esta operação não é comutativa?

A comutatividade diz algo sobre **todos** os elementos do conjunto. Para mostrar que uma propriedade **não é** satisfeita para todos os elementos, deve-se achar um contra-exemplo explítico.

Note que

$$x \triangleright y = y \qquad \text{e} \qquad y \triangleright x = x,$$

ou seja, as expressões algébricas que determinam $x \triangleright y$ e $y \triangleright x$ são diferentes. Isso **indica** que podemos ter $x \triangleright y \neq y \triangleright x$, mas ainda precisamos de um contra-exemplo específico.

Temos que

$$1 \triangleright 2 = 2,$$

e que

$$2 \triangleright 1 = 1,$$

logo $1 \triangleright 2 \neq 2 \triangleright 1$, e a operação não é comutativa.

Pergunta

Como verificar que a operação $\triangleright$ não tem elemento neutro?

Essa propriedade diz respeito acerca da **existência** de um certo elemento. Para mostrar que **não existe** um elemento satisfazendo alguma propriedade, deve-se mostrar que nenhum elemento satisfaz tal propriedade.

Se e fosse elemento neutro, teríamos

$$x = e \triangleright x,$$

e que

$$x = x \triangleright e = e$$

(estranho!).

Dado $e \in \mathbb{R}$, temos que

$$(e+1) \triangleright e = e,$$

e portanto $(e+1) \triangleright e \neq e+1$.
Isto mostra que existe um elemento x de $\mathbb{R}$ tal que $x \triangleright e \neq x$ (no caso, $x = e+1$. Portanto, nenhum $e \in \mathbb{R}$ é elemento neutro de $\triangleright$.