Somatórios

Álgebra Linear – Videoaula complementar 2

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

A letra “sigma”

$$\Sigma$$

Um exemplo

Qual o valor da soma?

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 16$$

Temos que descobrir qual a regra que define os termos dessa soma.

- A regra pode ser "dobre o termo anterior":

$$1 \underset{\times 2}{\frown} + \; 2 \underset{\times 2}{\frown} + \; 4 \underset{\times 2}{\frown} + \; 8 \underset{\times 2}{\frown} + \; 16 = 31$$

- A regra também poderia ser "some 1, depois 2, depois 3, depois 4,. . ."

$$1 \underset{+1}{\frown} + \; 2 \underset{+2}{\frown} + \; 4 \underset{+3}{\frown} + \; 7 \underset{+4}{\frown} + \; 11 \underset{+5}{\frown} + \; 16 = 41$$

Reticências não são precisas!

Regra geradora

Quando sabemos a “regra” que cria os elementos da sequência, podemos deixá-la explícita:

$$1 + 2 + \cdots + 2^n + \cdots + 16$$

Os termos da soma são as potências de 2.

Regra geradora

Mas e se fosse

$$3 + 6 + \cdots + (2n^3 - 9n^2 + 10n + 3) + \cdots + 1203?$$

Qual o "n" inicial? Qual o "n" inicial?

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	10
$2n^3 - 9n^2 + 10n + 3$	3	6	3	6	27	$\cdots$	1203

Começa em $n = 0$ ou $n = 2$?

Somatórios

Utilizamos a letra "Σ" para denotar "soma":

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

- i: variável
- a_i: "regra" de formação do i-ésimo termo
- m: onde a soma inicia
- n: onde a soma termina

Somatórios
Exemplo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{4} 2^i &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \\ &= 31\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{10}(2k^3 - 9k^2 + 10k + 3) &= (2\cdot 0^3 - 9\cdot 0^2 + 10\cdot 0 + 3) \\
&\quad + (2\cdot 1^3 - 9\cdot 1^2 + 10\cdot 1 + 3) \\
&\quad + (2\cdot 2^3 - 9\cdot 2^2 + 10\cdot 2 + 3) \\
&\quad \dots \\
&\quad + (2\cdot 10^3 - 9\cdot 10^2 + 10\cdot 1 + 3) \\
&= 3 + 6 + 3 + \cdots + 1203 \\
&= 3168.
\end{aligned}
$$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$
- $\displaystyle\sum_{i=m}^{m+1} 1 = 1 + 1 = 2$
- $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} 1 = n - m + 1.$

- $$\sum_{i=m}^{n}(ca_i) = c\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)$$
- $$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) &= (a_m + b_m) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_m + \cdots + a_n) + \cdots + (b_m + \cdots + b_n) \\ &= \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=m}^{n} b_i\right)\end{aligned}$$

- $$\sum_{j=m}^{n} j = m + (m+1) + (m+2) + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$
  $$= \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}$$

- $$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{n} r^j &= \sum_{j=m}^{n} r^j \frac{(1-r)}{(1-r)} \\ &= \frac{\sum_{j=m}^{n} r^j(1-r)}{(1-r)} \\ &= \frac{\sum_{j=m}^{n}(r^j - r^{j+1})}{(1-r)} \\ &= \frac{(r^m - r^{m+1}) + (r^{m+1} - r^{m+2}) + \cdots + (r^{n-1} + r^n) + (r^n - r^{n+1})}{(1-r)} \\ &= \frac{r^m - r^{n+1}}{(1-r)}\end{aligned}$$

Se p é um número e $a_i = b_{i+p}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} a_i &= a_m + \cdots + a_n \\
&= b_{m+p} + \cdots + b_{n+p} \\
&= \sum_{j=m+p}^{n+p} b_j \\
&= \sum_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p}
\end{aligned}
$$

Mais simples: Pondo $j = i + p$, temos

- $j = m + p$ quando $i = m$;
- $j = n + p$ quando $i = n$;
- $i = j - p$

e assim

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p}.$$

Variações

- Se $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, então

$$\sum_{s \in S} s = \sum_{i=1}^{n} s_i;$$

$$\sum_{s \in S} (4s^2) = (4s_1^2) + \cdots + (4s_n^2)$$

- $\displaystyle\sum_{s \in \varnothing} s = 0$
- $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$