EMB5007 – Álgebra Linear
Professor: Luiz Gustavo Cordeiro
Projeto 1 – Lights Out e sistemas lineares em aritmética Booleana

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus de Joinville

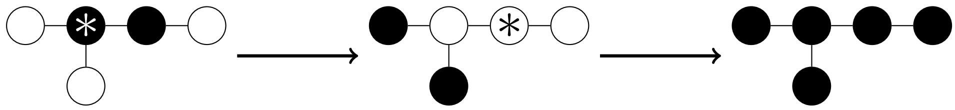
Grupo da parte 1:

Regras do jogo

Uma partida do jogo *Lights Out* é composta de várias lâmpadas conectadas. Cada lâmpada admite dois estados: "acesa" ou "apagada". Ao pressionar uma lâmpada, o seu estado e o de todas as lâmpadas adjacentes são alternados.

O objetivo do jogo é, dado um estado inicial, apertar uma sequência de lâmpadas que faz com que todas elas fiquem apagadas. Um objetivo mais difícil é realizar esse processo com o menor número possível de toques.

Veja um exemplo abaixo. Os círculos em branco denotam lâmpadas acesas, e os círculos escuros denotam lâmpadas apagadas. Partindo da configuração à esquerda, uma solução válida para o jogo é obtida apertando-se os botões marcados com asteriscos em sequência.



Parte 1: Criando o jogo

1. Desenhe no espaço abaixo uma malha com 10 lâmpadas e várias conexões entre elas[1]. Não crie dois circuitos separados. Não preencha as lâmpadas com nenhuma cor por enquanto.

2. Ponha essa malha (com lâmpadas apagadas) no programa auxiliar .

3. Pressione algumas lâmpadas e chegue a uma configuração não-trivial de lâmpadas acesas e apagadas. No desenho abaixo, marque quantas vezes cada lâmpada foi tocada.

4. No desenho abaixo, marque as lâmpadas acesas e apagadas.

5. Copie o desenho com as lâmpadas acesas e apagadas (mas sem as quantidades de toques) para o início da próxima folha.

[1]Aproximadamente 13 conexões normalmente cria um jogo interessante.

Grupo da parte 2:

Parte 2: Resolvendo o jogo

1. Enumere as lâmpadas do desenho acima com números de 1 a 10.

2. Para cada $k = 1, \ldots, 10$, construa um vetor m_k com 10 entradas, de modo que

$$(m_k)_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \text{ ou se as lâmpadas } i \text{ e } k \text{ estão conectadas} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Construa também um vetor v com 10 entradas, de modo que $v_i = 1$ se a lâmpada i no desenho acima está acesa, e 0 caso contrário.

$$m_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad m_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad m_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad m_4 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad m_5 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$m_6 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad m_7 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad m_8 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad m_9 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad m_{10} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

3. Encontre a solução geral (em aritmética Booleana) do sistema linear

$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_3 m_3 + \alpha_4 m_4 + \alpha_5 m_5 + \alpha_6 m_6 + \alpha_7 m_7 + \alpha_8 m_8 + \alpha_9 m_9 + \alpha_{10} m_{10} = v.$$

(3.i) Considere a matriz de coeficientes M do sistema linear acima; Escalone a matriz aumentada do sistema utilizando aritmética Booleana (você pode utilizar o programa auxiliar).

$$\left[M \,\vdots\, v\right] = \left[\begin{array}{c:c} \quad & \quad \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c:c} \quad & \quad \end{array}\right]$$

(3.ii) Determine as variáveis livres (correspondentes às colunas sem pivôs) e as dependentes (correspondentes às colunas com pivôs) da solução geral do sistema linear.

(3.iii) Reescreva as equações associadas à forma escalonada, e isole as variáveis dependentes em função das variáveis livres.

(3.iv) Escreva a solução geral do sistema no item (3) em forma vetorial paramétrica*.

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \end{bmatrix} =$$

4. Determine uma solução particular para o sistema linear do item (3), e use-a para determinar uma sequência de toques em lâmpadas que resolvem o jogo de Lights Out sob consideração. (Teste no programa auxiliar.)